马尔科夫链基础及其应用

施仁杰 编著

西安电子科技大学出版社

马尔科夫链基础及其应用

施仁杰　编著

西安电子科技大学出版社

1992

(陕)新登字 010 号

内容简介

本书系统地介绍了马尔科夫链的基本理论与方法，并将马尔科夫链的稳定性能分析作为中心议题展开讨论，特别是对于实践中常见的状态很多的大马尔科夫链及有关的新近成果给予了更多的关注。书中概括了研究与应用马尔科夫链的解析、代数、统计与计算机分析等主要方法，还收集整理了分布在许多领域中的典型应用实例，可资借鉴。

全书内容安排循序渐进，对重要的概念与结论或阐明其实际意义或作出直观解释，文中论证思路清晰推导详密，便于教学和自学。

本书可作为应用数学专业和非数学专业的高年级学生或研究生的选修课教材，也适合于在电子、计算机、通信、控制、物理、化学、生物、地质、天文、气象、经济、管理等各个领域中工作的广大科技人员学习与参考。

马尔科夫链基础及其应用

施仁杰　编著

责任编辑　王绍菊

西安电子科技大学出版社出版发行

陕西省大荔县印刷厂印刷

新华书店经销

开本 787×1092 1/16　印张 16 4/16 字数　　千字

1992 年 11 月第 1 版　1992 年 11 月第 1 次印刷 印数 1—1 500

ISBN 7－5606－0183－9/O・0010　　定价：　4.25 元

序　言

自 1907 年苏联数学家 A. A. Марков 引出马尔科夫链概念，并开始进行研究以来，经过世界各国几代数学家的相继努力，其中特别是 B. И. Романовский、A. H. Колмогоров、W. Doeblin、J. L. Doob、P. Lévy、W. Feller、钟开莱（Kai Lai Chung）、王梓坤等著名学者的代表性工作与卓越贡献，使得马尔科夫链目前已成为内容十分丰富理论上相当完整的数学分支，呈现出一派根深叶茂生机勃发的景象。而且在科学研究、发展生产、改进技术、社会服务等各个方面，马尔科夫链理论已经成为强有力的数学工具，广泛地被应用于物理、化学、生物、天文、气象、地质、控制、计算机、通信、随机服务、经济、管理、教育等等众多领域之中，理论与应用的成果层出不穷，真可谓遍地开花硕果累累。

本书主要面向应用数学专业与非数学专业的高年级学生或研究生以及广大的科技工作者，介绍马尔科夫链的基础理论与应用方法，以期达到学以致用的目的。全书的内容可分为三大部分。第一部分包括第 1、2、3、4、5、8 章，这是马尔科夫链的基本概念与基础理论部分。对于状态空间是有限的或是可列无限的、对时间是齐次的或是非齐次的、对参数是离散的或是连续的等各种情况都进行了论述，尤其是对于实践中常见的状态有限但又很多的大马尔科夫链及有关的新近成果给予了特别的关注。在这一部分里，始终都围绕着马尔科夫链的转移规律及其稳定性能分析这个具有实际意义的中心议题展开讨论。第二部分概括了研究与应用马尔科夫链的几种主要方法，即解析方法、代数方法、数理统计方法与计算机分析方法，前两种方法贯穿在全书之中，后两种方法分别在第 6、7 两章中作了简要的介绍。在当今应用马尔科夫链去解决实际问题的过程中，这些方法都是必不可少的。由第 9 章构成的第三部分收集整理了分布在许多不同领域里的应用实例，它们可以作为捕捉实际问题的本质、进行合理的简化和假设、建立马尔科夫链模型、应用理论求得解答并给出问题解释的典范。这是赋有普遍指导意义的。掌握这些内容不仅可以对马尔科夫链这一数学分支的重要意义、基本概念、基本理论、基本方法及其整体框架有一个系统的了解，而且也为读者进一步学习和应用诸如马尔科夫链的极限定理、构造理论与随机模拟等既有理论意义又有实用价值的专题知识奠定必要的初步基础。

本书是在几次为开设选修课而编写的讲稿的基础上，参考了国内外有关资料，经过修改、充实、加工而成。对书中的大多数结论都给出了详密的论证和推导，即使未作严格证明的论断一般都指明了出处，以备读者查阅。特别地，对一些重要的概念和结论，既强调它们的实际意义，又尽力给出恰当的直观解释。只要读者具有一般微积分、线性代数、概率统计的基础知识便可阅读本书，领会并运用书中的内容与方法。

关于书中采用的记号需作如下的说明，凡是在论述中要引用前面或后面所阐明的内容时，我们用记号“I. § 2”、“I. (50)”、“I. 定理 3”依次表示第一章的第 2 节、式 (50)、定

理 3，而用记号“§2”、“（50）”、“定理 3”、“表 1”、“图 2”依次表示本章的第 2 节、式（50）、定理 3、表 1、图 2。

正当书稿完成之时，作者怀着十分崇敬的心情深深地感激母校南开大学的恩师们，是他们为作者敞开了数学之门、奠定了数学基础，并在治学态度与治学方法上给予作者以深远的教益，这样才使作者能够从前人的工作中吸取丰富的思想知识的结晶，完成本书的写作任务。

在本书的写作过程中，作者获得了河南省自然科学基础研究基金的部分资助，得到了原黄河大学的校、科研处、数学教研室各级领导的支持与鼓励，谨此深表谢意。本书能够尽快出版这与西安电子科技大学出版社的大力协助是分不开的。特别是编辑景虹、王绍菊同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，此外范统同志为本书的写作提供了有益的资料，在此向他们表示诚挚的感谢。

由于作者的水平有限，书中不妥甚至错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

施仁杰

1992 年 4 月

目　录

序言
第一章　马尔科夫链的基本概念 …… 1
§1　马尔科夫链的定义 …… 1
§2　转移概率 …… 6
§3　多重马尔科夫链 …… 8
§4　停止时间与强马尔科夫性 …… 9
§5　马尔科夫链模型 …… 11
第二章　状态的分类 …… 17
§1　状态的基本属性 …… 17
1. 可达关系 …… 17
2. 几个特征量 …… 17
3. 特征量之间的关系 …… 19
4. 状态的基本属性 …… 26
§2　状态属性的判别及其有关性质 …… 27
1. 常返性的判定及其有关性质 …… 27
2. 周期性的判定及其有关性质 …… 31
§3　状态空间的分解 …… 32
1. 状态类与闭集 …… 32
2. 状态空间的分解 …… 35
3. 马尔科夫随机系统的运动规律 …… 38
第三章　转移概率的稳定性能 …… 40
§1　转移概率的极限性质 …… 40
§2　转移概率平均的极限性质 …… 44
§3　平稳分布 …… 49
§4　计算首达概率与平均首达时间的代数方法 …… 55
1. 线性方程组的非负解 …… 55
2. 首达概率与平均首达时间的方程解 …… 58
3. 常返性的代数判别法 …… 63
第四章　有限马尔科夫链 …… 71
§1　有限马尔科夫链的特异性质 …… 71
§2　有限马尔科夫链的代数处理方法 …… 77

1. 几个预备引理 …… 77
2. 多步转移概率的计算公式与遍历性 …… 82
3. 常返性、周期性与状态空间分解的代数处理 …… 89
§3 计算大马尔科夫链的平稳分布的聚集状态法 …… 92
第五章 有限非齐次马尔科夫链 …… 100
§1 基本概念 …… 100
§2 弱遍历性 …… 104
§3 强遍历性 …… 112
第六章 马尔科夫链的统计推断 …… 120
§1 最大似然估计 …… 120
1. 转移概率的最大似然估计 …… 120
2. 序列相关的渐近分布 …… 124
§2 假设检验 …… 128
1. χ^2 检验 …… 128
2. 基于序列相关之上的独立性检验 …… 133
§3 更深入的论题 …… 134
1. 吸收链的推断 …… 134
2. 分组链 …… 135
3. 熵 …… 140
4. 可列状态空间 …… 142
第七章 马尔科夫链在计算机上的分析 …… 144
§1 遍历性的判定——列和法 …… 144
§2 马尔科夫链的分析 …… 149
1. 非遍历马尔科夫链的分析 …… 150
2. 遍历马尔科夫链的分析 …… 158
§3 大马尔科夫链与可列马尔科夫链的分析 …… 161
1. 不可分大马尔科夫链的平稳分布 …… 161
2. 可列马尔科夫链的转移概率矩阵的分析 …… 163
第八章 连续参数的马尔科夫链 …… 167
§1 基本的概念与性质 …… 167
§2 标准转移概率的可微性 …… 172
§3 柯尔莫哥洛夫向前与向后方程 …… 176
§4 两个重要的连续参数齐次马尔科夫链 …… 181
1. 生灭过程 …… 181
2. 普阿松过程 …… 185
第九章 马尔科夫链的应用 …… 195
§1 马尔科夫链在经济领域中的应用 …… 195
§2 马尔科夫链在生命科学中的应用 …… 202
§3 马尔科夫链在随机服务系统中的应用 …… 210

§4 马尔科夫链在计算机科学中的应用 …… 219
§5 马尔科夫链在物理学与化学中的应用 …… 233
1. 马尔科夫链在物理学中的简单应用 …… 233
2. 马尔科夫链在化学中的简单应用 …… 235
§6 马尔科夫链在地质学中的应用 …… 239
参考文献 …… 248
内容索引 …… 250

第一章　马尔科夫链的基本概念

§1　马尔科夫链的定义

被人们所考察的随着时间推移而随机变化的实际系统$\sum$，常常是在知道了$\sum$现在所处的状态之下，$\sum$将来的演变与其过去的经历是独立无关的。例如，波耳氢原子模型中的电子可以处在不同能级的轨道上运动，如果已知在时刻t_n此电子处在第i号轨道上，那么在下一个时刻t_{n+1}（$>t_n$）此电子跳到第j号轨道上，这事件与以前$t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}$（$<t_n$）各个时刻它处在哪号轨道上的历史是独立无关的。又如，生物基因遗传从这一代到下一代的转移中仅有赖于这一代而与以往各代无关。再如，每当评估一个复杂的计算机系统的性能时，就要充分利用此系统在各个时刻作状态演变通常所具有的概率特性：即系统下一个将达到的状态，仅依赖于目前所处的状态，而与以往处过的状态无关。此外，考察某公司的经营状况每月进行一次，该公司下个月销路好和差一般只与本月的销路有关，而与以前销售情况无关。诸如上述这样一类具有所谓无后效性的随机系统在信息、控制、计算机、物理、生物遗传、心理、经济、社会等科学领域中，在工程系统的可靠性分析、随机服务系统的排队分析、商业库存管理、市场预测、产品品种转换选择、不同阶层的社会流动等等众多的应用研究中时时出现屡见不鲜。为了满足实际应用的需要，首先必须应用数学的语言与工具对这些实际系统作出正确的定量描述，进而揭示出这些系统在状态的转移中普遍存在的内在统计规律。由此引出了本章中的一系列基本概念。

相对于一随机试验，设Ω是由所有样本点$\{\omega\}$构成的**样本空间**，$\mathscr{F}$是Ω上所有随机事件构成的事件集合称为**σ-代数**，P是定义在$\mathscr{F}$上的概率测度即概率。称定义在**概率空间**$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量族$X=\{X_t(\omega), t\in T\}$为一随机过程，其中$T$为一参数集，若$T$是一个含有可列多个元素的无限集，例如$\{X_n(\omega), n=0, 1, \cdots\}$称为**离散参数的随机过程或随机序列**，若$T$是不可列无限集，例如$\{X_t(\omega), t\geqslant 0\}$称为**连续参数的随机过程**。一随机过程所有可能取值的集合称为该过程的**状态空间**，记作S，如果S是可列集或有限集，则称此过程为**链**。可将随机过程看作是两个变量的函数$X_t(\omega)=X(t, \omega)$，$t\in T$，$\omega\in\Omega$，对固定的ω，$X_t(\omega)$是定义在T上的t的函数，称为该过程的一个样本，对固定的t，$X_t(\omega)$是一个随机变量，常简记为X_t，若将参数t看作为时间，那么X_t就表示随机系统$\sum$在时刻t所处的状态。

定义 设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的离散参数的随机过程，其状态空间 S 为可列集或有限集，如果 X 具有由下式定义的**马尔科夫性**（或**无后效性**）：即对任意的非负整数 n，及任意的状态 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\in S$，只要 $P(X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n)>0$，总有

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n)$$
$$=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n) \tag{1}$$

成立，则称 X 为**离散参数的马尔科夫链**。若 S 为可列集或有限集，则称 X 分别依次为**离散参数的可列马尔科夫链和有限马尔科夫链**。式 (1) 的直观意义可解释为：已知随机系统 $\sum$ 在现时刻 n 处于状态 i_n，即事件“$X_n=i_n$”已发生的条件之下，在将来 $n+1$ 时刻 $\sum$ 处于状态 i_{n+1} 的事件“$X_{n+1}=i_{n+1}$”与 $\sum$ 在过去 0，1，…，$n-1$ 等时刻的经历即事件“$X_0=i_0$，$X_1=i_1$，…，$X_{n-1}=i_{n-1}$”是条件独立的。等式 (1) 仅仅是用来定义马尔科夫性的一种形式，下面的定理将给出马尔科夫性的其它等价形式。为简便起见，以后分别称马尔科夫性和马尔科夫链为**马氏性**和**马氏链**。

定理 1 设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机序列，X 的状态空间 S 是可列集或有限集，则下列陈述互相等价：

(i) X 是离散参数的马氏链，即式 (1) 成立。

(ii) 对任何正整数 n，任何非负整数列：$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}$ 及任何 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\in S$，恒有

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_0}=i_0, X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_n}=i_n)$$
$$=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n)\text{。} \tag{2}$$

这里自然要求 $P(X_{t_0}=i_0, X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_n}=i_n)>0$，以后不再一一声明。

(iii) 对任何正整数 n 及任何 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\in S$，恒有

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_{n+1}=i_{n+1})$$
$$=P(X_0=i_0)P(X_1=i_1|X_0=i_0)\cdots P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)\text{。} \tag{3}$$

(iv) 对任何正整数 n，任何非负整数列：$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}$ 及任何 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\in S$，恒有

$$P(X_{t_0}=i_0, X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_{n+1}}=i_{n+1})$$
$$=P(X_{t_0}=i_0)P(X_{t_1}=i_1|X_{t_0}=i_0)\cdots P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n)$$
$$=\sum_{i\in S}P(X_0=i)P(X_{t_0}=i_0|X_0=i)\cdots P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n)\text{。} \tag{4}$$

(v) 对任何正整数 n, m，任何非负整数列：$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}<\cdots<t_{n+m}$ 及任何 $i_0, i_1, \cdots, i_n, i_{n+1}, \cdots, i_{n+m}\in S$，恒有

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}, \cdots, X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_0}=i_0, \cdots, X_{t_n}=i_n)$$
$$=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}, \cdots, X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n)\text{。} \tag{5}$$

(vi) 对任何正整数 n, m，任何非负整数列：$0\leqslant t_0<t_1\cdots<t_n<t_{n+1}<\cdots<t_{n+m}$，以及任何 $i_0, i_1, \cdots, i_n, i_{n+1}, \cdots, i_{n+m}\in S$，恒有

$$P(X_{t_0}=i_0, \cdots, X_{t_{n-1}}=i_{n-1}, X_{t_{n+1}}=i_{n+1}, \cdots, X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n)$$
$$=P(X_{t_0}=i_0, \cdots, X_{t_{n-1}}=i_{n-1}|X_{t_n}=i_n)$$

$$\times P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1}, \cdots, X_{t_{n+m}} = i_{n+m} | X_{t_n} = i_n)\ 。\tag{6}$$

(vii) 对任何正整数 n, m, 任何非负整数列 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots < t_{n+m}$, 以及任何 i_0, i_1, $\cdots$, i_n, i_{n+1}, $\cdots$, $i_{n+m} \in S$, 恒有

$$P(X_{t_0} = i_0, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1} | X_{t_n} = i_n, X_{t_{n+1}} = i_{n+1}, \cdots, X_{t_{n+m}} = i_{n+m})$$
$$= P(X_{t_0} = i_0, \cdots, Xt_{n-1} = i_{n-1} | X_{t_n} = i_n)\ 。\tag{7}$$

(viii) 对任何正整数 n 及任何 $i \in S$, 记 $\mathscr{F}$ $(X_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 是由 X_0, $\cdots$, X_{n-1}生成的最小 σ-代数, 即包含 Ω 及一切形如 $\{\omega: X_k(\omega) = j\}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $j \in S$ 的 ω 集, 并对取余及可列并运算封闭的最小集类, 又记 $\mathscr{F}$ $(X_k, k \geqslant n+1)$ 是由 X_{n+1}, X_{n+2}, $\cdots$生成的最小 σ-代数, 则对任何 $A \in \mathscr{F}(X_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1)$, $B \in \mathscr{F}(X_k, k \geqslant n+1)$, 恒有

$$P(B | A, X_n = i) = P(B | X_n = i)\ 。\tag{8}$$

(ix) 对任何正整数 n, 任何 $i \in S$, 以及任何 $A \in \mathscr{F}(X_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1)$, $B \in \mathscr{F}$ $(X_k, k \geqslant n+1)$, 恒有

$$P(AB | X_n = i) = P(A | X_n = i) P(B | X_n = i)\ 。\tag{9}$$

(x) 对任何正整数 n, 任何 $i \in S$, 以及任何 $A \in \mathscr{F}$ $(X_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1)$, $B \in \mathscr{F}$ $(X_k, k \geqslant n+1)$, 恒有

$$P(A | X_n = i, B) = P(A | X_n = i)\ 。\tag{10}$$

证　我们将按图 1 的线路图所示的顺序关系证明定理。

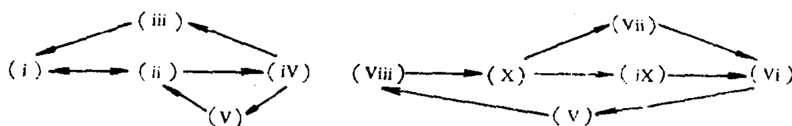


图　1

(i) 是 (ii) 的特例, 故 (ii) → (i) 显然。现证 (i) → (ii), 为简明起见不失一般性可取 $n=1$, $t_0=1$, $t_1=3$, $t_2=5$ 的情形证明即可。由概率乘法定理及式 (1) 便有

$$P(X_0 = j_0, X_1 = i_0, X_2 = j_1, X_3 = i_1, X_4 = j_2, X_5 = i_2)$$
$$= P(X_0 = j_0, X_1 = i_0, X_2 = j_1, X_3 = i_1)$$
$$\times P(X_4 = j_2 | X_0 = j_0, X_1 = i_0, X_2 = j_1, X_3 = i_1)$$
$$\times P(X_5 = i_2 | X_0 = j_0, X_1 = i_0, X_2 = j_1, X_3 = i_1, X_4 = j_2)$$
$$= P(X_0 = j_0, X_1 = i_0, X_2 = j_1, X_3 = i_1) P(X_4 = j_2 | X_3 = i_1)$$
$$\times P(X_5 = i_2 | X_4 = j_2),$$

在上面等式两边对 j_0, i_0, j_1, $j_2 \in S$ 求和以及对 j_0, j_1, $j_2 \in S$ 求和, 由概率的完全可加性分别得到:

$$P(X_3 = i_1, X_5 = i_2) = P(X_3 = i_1) \sum_{j_2 \in S} P(X_4 = j_2 | X_3 = i_1) P(X_5 = i_2 | X_4 = j_2)$$

$$P(X_1 = i_0, X_3 = i_1, X_5 = i_2) = P(X_1 = i_0, X_3 = i_1)$$
$$\times \sum_{j_2 \in S} P(X_4 = j_2 | X_3 = i_1) P(X_5 = i_2 | X_4 = j_2)。$$

比较以上两式便有: 对任何 i_0, i_1, $i_2 \in S$

$$P(X_5 = i_2 | X_1 = i_0, X_3 = i_1) = P(X_5 = i_2 | X_3 = i_1),$$

即式（2）成立。一般情形完全类似可证。

现证（ii）→（iv），由概率乘法定理及式（2）

$$P(X_{t_0}=i_0,X_{t_1}=i_1\cdots,X_{t_n}=i_n,X_{t_{n+1}}=i_{n+1})$$
$$=P(X_{t_0}=i_0,X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_n}=i_n)P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_0}=i_0,X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_n}=i_n)$$
$$=P(X_{t_0}=i_0,X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_n}=i_n)P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n)。$$

再重复此手续 n 次，并利用概率的完全可加性就得式（4）。

现证（iv）→（v），由式（4）

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n)$$
$$=\frac{P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n,X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m})}{P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n)}$$
$$=[P(X_{t_0}=i_0)\cdots P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1})P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n)\cdots$$
$$\times P(X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_{n+m-1}}=i_{n+m-1}]\div[P(X_{t_0}=i_0)\cdots$$
$$\times P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1})]$$
$$=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n)\cdots P(X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_{n+m-1}}=i_{n+m-1})$$
$$\times P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n)$$
$$=\frac{P(X_{t_n}=i_n,X_{t_{n+1}}=i_{n+1}\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}\}}{P(X_{t_n}=i_n)}$$
$$=\frac{P(X_{t_n}=i_n)P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n)\cdots P(X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_{n+m-1}}=i_{n+m-1})}{P(X_{t_n}=i_n)}$$

比较以上两式即得式（5）。

因为（ii）是（v）的特例，故（v）→（ii）显然。而（iii）是（iv）的特例，故（iv）→（iii）显然。

现证（iii）→（i），由式（3）

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)$$
$$=\frac{P(X_0=i_0)P(X_1=i_1|X_0=i_0)\cdots P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)}{P(X_0=i_0)P(X_1=i_1|X_0=i_0)\cdots P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})}$$
$$=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)。$$

现证（viii）→（x），由式（8）

$$P(A|X_n=i,B)=\frac{P(A,X_n=i,B)}{P(X_n=i,B)}=\frac{P(A,X_n=i)P(B|A,X_n=i)}{P(X_n=i,B)}$$
$$=\frac{P(A,X_n=i)P(B|X_n=i)}{P(X_m=i,B)}=P(A|X_n=i),$$

即式（10）成立。

现证（x）→（ix），由式（10）

$$P(A\,B|X_n=i)=\frac{P(A,X_n=i,B)}{P(X_n=i)}$$
$$=\frac{P(X_n=i,B)\cdot P(A|X_n=i)}{P(X_n=i)}$$
$$=P(A|X_n=i)P(B|X_n=i),$$

即式 (9) 成立。

(vi) 是 (ix) 的特例，故 (ix) → (vi) 显然。下证 (vi) → (v)，由式 (6)

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n)$$

$$=\frac{P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n,X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m})}{P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n)}$$

$$=P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}|X_{t_n}=i_n)P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n)$$

$$\times P(X_{t_n}=i_n)/P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n)$$

$$=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n),$$

即式 (5) 成立。

现证 (v) → (viii)，应用 λ-系方法证明[1]。对任意给定的正整数 n 及任何 $i\in S$，记

$$\mathscr{C}=\{C=(X_{S_1}=i_1,\cdots,X_{S_l}=i_l):\text{正整数 } l<n,$$

$$\text{非负整数 } 0\leqslant S_1<\cdots<S_l<n,\ i_1,\cdots,i_l\in S\},$$

$$\mathscr{D}=\{D=(X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_m}=j_m):\text{正整数 } m,$$

$$\text{正整数 } n<t_1<\cdots<t_m,j_1,\cdots,\ j_m\in S\},$$

由式 (5) 知：对任何 $C\in\mathscr{C}$，任何 $D\in\mathscr{D}$，都有

$$P(C|D,X_n=i)=P(D|X_n=i),$$

现在任意固定一 $\tilde{D}\in\mathscr{D}$，令

$$\mathscr{H}=\{C:C\subseteq\Omega,\text{使 } P(\tilde{D}|C,X_n=i)=P(\tilde{D}|X_n=i)\},$$

易验证 $\mathscr{H}$ 是 λ-系，$\mathscr{C}$ 是 π-系，而且 $\mathscr{H}\supseteq\mathscr{C}$，故 $\mathscr{H}\supseteq\mathscr{F}(\mathscr{C})=\mathscr{F}(X_k,\ 0\leqslant k\leqslant n-1)$[1]，这就表示对任一特定的 $\tilde{D}\in\mathscr{D}$，及任何 $A\in\mathscr{F}(X_k,\ 0\leqslant k\leqslant n-1)$ 有

$$P(\tilde{D}|A,X_n=i)=P(\tilde{D}|X_n=i)。$$

现在对任意特指的 $\tilde{A}\in\mathscr{F}(X_k,\ 0\leqslant k\leqslant n-1)$，令

$$\mathfrak{M}=\{D:D\subseteq\Omega,\text{使 } P(D|\tilde{A},X_n=i)=P(D|X_n=i)\},$$

易验证 $\mathfrak{M}$ 是 λ-系，$\mathscr{D}$ 是 π-系，并由前面已证之结果知 $\mathfrak{M}\supseteq\mathscr{D}$，故 $\mathfrak{M}\supseteq\mathscr{F}(\mathscr{D})=\mathscr{F}(X_k,\ k\geqslant n+1)$[1]，综上所证，即得式 (8) 成立。

(vii) 是 (x) 的特例，故 (x) → (vii) 显然。最后证 (vii) → (vi)，由式 (7)

$$P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1},X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n)$$

$$=P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1},X_{t_n}=i_n,X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m})/P(X_{t_n}=i_n)$$

$$=\frac{P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1},X_{t_n}=i_n,X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m})}{P(X_{t_n}=i_n,X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m})}$$

$$\times\frac{P(X_{t_n}=i_n,X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m})}{P(X_{t_n}=i_n)}$$

$$=P(X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}|X_{t_n}=i_n)P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n),$$

即式 (6) 成立。按照线路图所示的逻辑关系，任何两陈述都是相互等价的，定理证完。

注 1　在定理 1 中，除了定义形式 (iii) 与 (iv) 是用随机序列的有限维联合分布来表述的之外，其它定义形式都是通过条件概率来刻画马氏性的，尽管这十种定义从表面形式上来看有强有弱，但是实际上都是等价的，具体使用时，应当针对不同的场合选择适宜的

定义形式。

注 2 定义形式 (ii)、(v)、(viii) 说明在已知 $X_n=i$ 的条件下，系统过去的历史不仅对它下一步转移是独立的，对它将来的任何转移都是独立的。

注 3 定义形式 (vi) 与 (ix) 具有对称性，正因为如此，如果随机序列 $\{X_0, X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots\}$ 是马氏链，那么按照相反的顺序重新考虑 $\{\cdots, X_{n+1}, X_n, \cdots, X_1, X_0\}$，则它仍是马氏链，等价定义形式 (vii)、(x) 正说明了这一点。

注 4 在等价定义形式 (viii)、(ix)、(x) 中，实际上可取 $A\in\mathscr{F}(X_k, 0\leqslant k\leqslant n)$，$B\in\mathscr{F}(X_k, k\geqslant n)$ 结论仍成立[15]。

马氏链的本质概率特征是马氏性，而定理 1 指出马氏性需用诸如 $P(X_{n+m}=j|X_n=i)$，$n\geqslant 0, m>0$，$i, j\in S$ 的条件概率来表征，因此下一节将对这些条件概率展开讨论。

§2 转移概率

定义 设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是马氏链，其状态空间 S 不妨取为 $\{1, 2, \cdots\}$ 或 $\{1, 2, \cdots, N\}$，X 在时刻 n 处于 i 状态的条件下，经过 m 步转移，在时刻 $n+m$ 到达 j 状态的条件概率 $P(X_{n+m}=j|X_n=i)$ 称为 X **的 m 步转移概率**，记为 $p_{ij}(n, n+m)$ 或 ${}_np_{ij}^{(m)}$，以 ${}_np_{ij}^{(m)}$ $(i, j\in S)$ 作为第 i 行第 j 列的元素排成的矩阵 ${}_nP^{(m)}\triangleq[{}_np_{ij}^{(m)}]$ 称为 X 的 **m 步转移概率矩阵**，当 $m=1$ 时，将 ${}_np_{ij}^{(1)}$、${}_nP^{(1)}$ 分别依次简记为 ${}_np_{ij}$、${}_nP$。又规定 ${}_np_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$，$i, j\in S$，即 ${}_nP^{(0)}=I$（单位矩阵）。

对任一方阵 $R=[r_{ij}]$，如果每个元素 r_{ij} 均为非负实数，而且每一行上的元素之和 $\sum_j r_{ij}$ 均为 1 则称此方阵为**随机矩阵**，易验证随机矩阵 R 有下列基本性质：

(1) R 的任意次幂 R^m，$m=1, 2, \cdots$ 都为随机矩阵。

(2) 如果 R 的各行皆对应相等，即 $r_{ij}=r_j$，$i\geqslant 1$，则

$$R = R^2 = \cdots = R^m = \cdots \tag{11}$$

对于 X 的 m 步转移概率矩阵 ${}_nP^{(m)}=[{}_np_{ij}^{(m)}]$，$n=0, 1, \cdots$，由概率的非负性与完全可加性，有 ${}_np_{ij}^{(m)}\geqslant 0$，$i, j\in S$，而且

$$\sum_{j\in S}{}_np_{ij}^{(m)} = \sum_{j\in S}P(X_{n+m}=j|X_n=i) = P(\bigcup_{j\in S}(X_{n+m}=j)|X_n=i) = 1 \tag{12}$$

故 ${}_nP^{(m)}$，$n\geqslant 0$，$m\geqslant 1$ 都是随机矩阵，而且它们还具有下面更重要的性质：

定理 2 对任何正整数 m、l 及非负整数 n，马氏链的转移概率矩阵 ${}_nP^{(m+l)}$、${}_nP^{(m)}$、${}_{n+m}P^{(l)}$ 满足下列方程：

$${}_nP^{(m+l)} = {}_nP^{(m)}\,{}_{n+m}P^{(l)}, \tag{13}$$

即

$${}_np_{ij}^{(m+l)} = \sum_{k\in S}{}_np_{ik}^{(m)}\,{}_{n+m}p_{kj}^{(l)}, \qquad i, j\in S, \tag{14}$$

称式 (13) 或 (14) 为**切普曼-柯尔莫哥洛夫** (Chapman－КОЛМОГОРОВ) 方程，简称为 **C－K 方程**。

证 由概率的完全可加性与马氏性有

$$\begin{aligned}{}_np_{ij}^{(m+l)} &= P(X_{n+m+l}=j|X_n=i)\\ &= \sum_{k\in S}\frac{P(X_n=i, X_{n+m}=k, X_{n+m+l}=j)}{P(X_n=i, X_{n+m}=k)}\end{aligned}$$

$$\times \frac{P(X_n = i, X_{n+m} = k)}{P(X_n = i)})$$

$$= \sum_{k \in S} {}_n p_{ik}^{(m)} {}_{n+m} p_{kj}^{(l)}。$$

注　C-K 方程的概率意义直观上是容易理解的，即系统$\sum$从状态 i 经 $m+l$ 步转移到状态 j，可以先从 i 经 m 步转移到 k，然后，再由 k 经 l 步转移到 j 两次转移来完成，但是 C-K 方程不是对任何随机序列都满足的，有了马氏性才能保证 C-K 方程的成立。

利用 C-K 方程及归纳法立即可得下面的推论。

推论　对任何非负整数 n，正整数 m 及任何 i，$j \in S$

$$\begin{aligned} {}_n p_{ij}^{(1+m)} &= \sum_{j_1 \in S} {}_n p_{ij_1} {}_{n+1} p_{j_1 j}^{(m)} \\ &= \sum_{j_1 \in S} {}_n p_{ij_1} \Big(\sum_{j_2 \in S} {}_{n+1} p_{j_1 j_2} {}_{n+2} p_{j_2 j}^{(m-1)} \Big) \\ &= \cdots = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_m \in S} {}_n p_{ij_1} {}_{n+1} p_{j_1 j_2} \cdots {}_{n+m} p_{j_m j}。\end{aligned} \tag{15}$$

式（15）指出马氏链的多步转移概率由一步转移概率完全决定。

马氏链的转移概率${}_n p_{ij}^{(m)}$不仅依赖于状态 i，j 及正整数 m，一般还依赖于非负整数 n。如果对一切 i，$j \in S$，${}_n p_{ij}$都与 n 无关，即

$${}_0 p_{ij} = {}_1 p_{ij} = {}_2 p_{ij} = \cdots = p_{ij}, \qquad i, j \in S, \tag{16}$$

或

$${}_0 P = {}_1 P = {}_2 P = \cdots = P,$$

则称此马氏链是**时间齐次的**，否则称为**非齐次的**。如果${}_n P$ 与 n 无关，利用式（15）及归纳法容易推得：对任何正整数 m，${}_n P^{(m)}$与 n 无关。

马氏链 X 的转移概率矩阵列${}_n P$，$n=0$，1，…只刻画了随机系统在转移过程中的概率法则，并不能由它决定出系统初始所处状态的概率，因此有必要引进概率 $q_i = P(X_0 = i)$，$i \in S$，并称 $\{q_i, i \in S\}$ 为 X 的**初始分布**。更一般地还应考虑 X 在任一时刻 n（$=0$，1，…）所处状态的概率 $q_i^{(n)} = P(X_n = i)$（$i \in S$），称为**绝对概率**：显然对任何 $n=0$，1，…，有

$$q_i^{(n)} \geqslant 0,\ i \in S;\ \sum_{i \in S} q_i^{(n)} = 1。 \tag{17}$$

若记 $q_i^{(0)} = q_i$，$i \in S$，那么对任何 $m=0$，1，…，利用式（15）便得

$$\begin{aligned} q_i^{(m+1)} = P(X_{m+1} = i) &= \sum_{j \in S} P(X_0 = j, X_{m+1} = i) \\ &= \sum_{j \in S} P(X_0 = j) {}_0 p_{ji}^{(m+1)} \\ &= \sum_{j, j_1, \cdots, j_m \in S} q_j^{(0)} {}_0 p_{jj_1} {}_1 p_{j_1 j_2} \cdots {}_m p_{j_m i}, \qquad i \in S。\end{aligned} \tag{18}$$

特别地，在齐次的情形下有

$$q_i^{(m+1)} = \sum_{j, j_1, \cdots, j_m \in S} q_j^{(0)} p_{jj_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_m i}, \qquad i \in S。 \tag{19}$$

故对任何 $m=0$，1，…，$\{q_i^{(m)}, i \in S\}$ 完全由 X 的初始分布与一步转移概率矩阵列所决定。

综上所述，对已给的马氏链，由它唯一确定出它的初始分布、一步转移概率矩阵列及任何时刻的概率分布。反之，可以证明在理论上极为重要而基本的定理：

定理 3（存在定理）　任给一概率分布 $\{q_i, i \in S\}$ 及随机矩阵列 $[{}_n p_{ij}]$，$n=0$，1，…，则必存在一概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）及定义在其上状态空间为 S 的马氏链 $\{X_n$，$n=0$，1，

$\cdots\}$，使得 $P(X_0=i)=q_i$，$P(X_{n+1}=j|X_n=i)={}_nP_{ij}$，对一切 i，$j\in S$，$n=0$，1，$\cdots$都成立。

证略（参见［1］)。在存在定理所述的意义下，马氏链完全由它的初始分布及一步转移概率矩阵列所决定。

§3 多重马尔科夫链

在有些实际问题如语言传送信息或气象预报等的探讨中，还会遇到比§1所定义的马氏链更一般的情形。

定义 设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机序列，状态空间 S 是可列集或有限集，如果存在正整数 K，对任意的整数 $n\geqslant K-1$ 及任意的 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\in S$，如果 $P(X_0=i_0, \cdots, X_n=i_n)>0$，总有

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n)\\
&\quad=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_{n-K+1}=i_{n-K+1},\cdots,X_n=i_n)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

成立，则称此 X 为 K 重马尔科夫链

定理4 如果 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是 K 重马氏链，则 X 必是 $K+1$ 重马氏链。

证 对任何正整数 $n\geqslant K$，任何 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\in S$，利用概率的完全可加性及假设条件式（20)，有

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_n=i_n)\\
&=\frac{P(X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1})}{P(X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_n=i_n)}\\
&=\sum_{j_0,\cdots,j_{n-K-1}\in S}\frac{P(X_0=j_0,\cdots,X_{n-K-1}=j_{n-K-1},X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_{n+1}=i_{n+1})}{P(X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_n=i_n)}\\
&\quad\times\frac{P(X_0=j_0,\cdots,X_{n-K-1}=j_{n-K-1},X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_n=i_n)}{P(X_0=j_0,\cdots,X_{n-K-1}=j_{n-K-1},X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_n=i_n)}\\
&=\sum_{j_0,\cdots,j_{n-K-1}\in S}P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=j_0,\cdots,X_{n-K-1}=j_{n-K-1},X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_n=i_n)\\
&\quad\times\frac{P(X_0=j_0,\cdots,X_{n-K-1}=j_{n-K-1},X_{n-K}=i_{n-K},\cdots X_n=i_n)}{P(X_{n-K}=i_{n-K},\cdots,X_n=i_n)}\\
&=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_{n-K+1}=i_{n-K+1},\cdots,X_n=i_n)\\
&=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n)\quad。
\end{aligned}
$$

下面的定理进一步指出：通过扩大状态空间维数的方法可将 K 重马氏链化为马氏链（一重)，于是可借助马氏链的已有理论结果来探讨 K 重马氏链的性质。

定理5 设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是 K 重马氏链，记 S^K 为乘积空间$\underbrace{S\times S\times\cdots\times S}_{K\text{个}S}$，又记 K 维随机向量 $Z_n=Z_n(\omega)=(X_n(\omega),X_{n+1}(\omega),\cdots,X_{n+K-1}(\omega)),\omega\in\Omega$，则$\{Z_n,n=0, 1, \cdots\}$ 是马氏链（一重)。

证 记 $e_n=(i_1(n), \cdots, i_K(n))$，$i_1(n), \cdots, i_K(n)\in S$，即 $e_n\in S$，$n=0, 1, \cdots$，只要证：对任何非负整数 n 及任意的 $e_0, e_1, \cdots, e_{n+1}\in S^K$，有

$$
\begin{aligned}
&P(Z_{n+1}=e_{n+1}|Z_0=e_0,\cdots,Z_n=e_n)\\
&\quad=P(Z_{n+1}=e_{n+1}|Z_n=e_n)。
\end{aligned}
\tag{21}
$$

为保证式（21）左方有意义，必须 $P(Z_0=e_0, \cdots, Z_n=e_n)>0$，那么由 Z_n 的定义应要求：

$$i_l(m+1)=i_{l+1}(m),\quad l=1,\cdots,K-1,\ m=0,1,\cdots,n \tag{22}$$

因此在 $e_0, \cdots, e_{n+1}$ 中的总共 $K(n+2)$ 个分量里，只能有 $K+n+1$ 个是自由的，不妨取为 $i_1(0), i_1(1), \cdots, i_1(n), i_1(n+1), i_2(n+1), \cdots, i_K(n+1)$，其余分量全被它们所确定，由此及式（22）

$$\begin{aligned}
&P(Z_{n+1}=e_{n+1}\,|\,Z_0=e_0,\cdots,Z_n=e_n)\\
&\quad=P(X_{n+1}=i_1(n+1),\cdots,X_{n+K-1}=i_{K-1}(n+1),X_{n+K}=i_K(n+1)\,|\,Z_0\\
&\quad=e_0,\cdots,Z_{n-1}=e_{n-1},X_n=i_1(n),X_{n+1}=i_1(n+1),\ \cdots,X_{n+K-1}\\
&\quad=i_{K-1}(n+1))P(X_{n+K}=i_k(n+1)\,|\,Z_0=e_0,\cdots,Z_{n-1}=e_{n-1},\\
&\qquad X_n=i_1(n),X_{n+1}=i_1(n+1),\cdots,X_{n+K-1}=i_{K-1}(n+1))\\
&\quad=P(X_{n+K}=i_K(n+1)\,|\,X_0=i_1(0),\cdots,X_{n-1}=i_1(n-1),\\
&\qquad X_n=i_1(n),X_{n+1}=i_1(n+1),\cdots,X_{n+K-1}=i_{K-1}(n+1))。
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&P(Z_{n+1}=e_{n+1}\,|\,Z_n=e_n)\\
&\quad=P(X_{n+1}=i_1(n+1),\ \cdots,\ X_{n+K-1}=i_{K-1}(n+1),\ X_{n+K}=i_K(n+1)\ \,|\,X_n\\
&\quad=i_1(n),\ X_{n+1}=i_1(n+1),\ \cdots,\ X_{n+K-1}=i_{l-1}(n+1))\\
&\quad=P\ (X_{n+K}=i_K(n+1)\ \,|\,X_n=i_1(n),\ X_{n+1}=i_1(n+1),\ \cdots,\ X_{n+K-1}=i_{K-1}(n+1))
\end{aligned}$$

由假设及式（20）知上面两个等式的右端相等，故其左端应相等，即式（21）成立，证完。

下面来给出马氏链 $\{Z_n, n=0, 1, \cdots\}$ 的转移概率，令 $e_0=(i_1, \cdots, i_K)$，$e_1=(j_1, \cdots, j_K)\in S^K$，设 $P(Z_n=e_0)>0$，记 ${}_np^{(1)}_{i_1,\cdots,i_K;j_1,\cdots,j_K}=P(Z_{n+1}=e_1\,|\,Z_n=e_0)$，由 Z_n 的构造及式（22）得

$${}_nP^{(1)}_{i_1,\cdots,i_K,j_1,\cdots,j_K}=\begin{cases}0 & 若有\ l(=1,\cdots,K-1),使\ j_l\neq i_{l+1},\\ P(X_{n+K}=j_K\,|\,X_n=i_1,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+K-1}=j_{K-1}),否则,\end{cases} \tag{23}$$

此即 $\{Z_n, n=0, 1, \cdots\}$ 的一步转移概率，如果式（23）的值对任何 e_0，$e_1\in S^K$ 都与 n 无关，那么 $\{Z_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是齐次的，这时称 K 重马氏链 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是齐次的。

§4　停止时间与强马尔科夫性

§1中定义的马氏性是指：已知系统在确定的时刻 n 处于状态 i 的条件下，确定时刻 n 以后发生的事件与 n 之前发生的事件独立，试问：对于不确定的"随机时刻 τ"是否仍能保持有相应的无后效性呢？所谓"随机时刻"在人们的实践中是经常会遇到的，例如，一水库的水位达到警戒水位的时刻，一系统因出现故障而停止运行的时刻，某银行的储蓄额达到百亿元的时刻等等都是具有不确定性的时刻，而且人们十分关注这些有实际意义的随机时刻以及在其前或其后所发生的事件，因此应对随机时间以及关于它的马氏性给出确切的数学定义。

定义　设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是齐次马氏链，又设 τ 是取非负整数及 ∞ 为值的随机变量，如果对每个非负整数 n，都有 $(\tau=n)\in\mathscr{F}(X_0, X_1, \cdots, X_n)$，即 $(\tau=n)$ 是完全由 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ 所决定的时间，则称 τ **是可选的或是 X 的停止时间**，简称 **X 的停时**。如果 τ 是 X 的停时，由定义易验证对任何非负整数 $m\leqslant n$，$\{\tau+m=n\}=\{\tau=n-m\}\in\mathscr{F}(X_0, X_1, \cdots, X_{n-m})\subset\mathscr{F}(X_0, X_1, \cdots, X_n)$，所以 $\tau+m$，$m=1, 2, \cdots$ 都是 X 的停时。

对 X 的停时 τ，定义

$$X_\tau=\begin{cases}X_n, & \tau=n,\ n=0,1,\cdots,\\ c, & \tau=\infty。\end{cases} \tag{24}$$

c 是指定的一值，但 $c\notin S$，这时用 $S\cup\{c\}$ 来代替原来的 S。因为对任何 $j\in S$，有

$$(X_\tau=j)=\bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n=j,\tau=n)\in\mathscr{F}, \tag{25}$$

所以 X_τ 从而 $X_{\tau+m}$，$m=1, 2, \cdots$ 都是随机变量。

设 τ 是 X 的停时，称随机事件 A 是 **τ 前事件**，如果对任何 $n=0, 1, \cdots$，$A\cap\{\tau=n\}\in\mathscr{F}(X_0, \cdots, X_n)$，即 A 是由随机变量 $X_0, \cdots, X_n$ 所确定的。相应地，如果随机事件 B 是由随机变量 X_τ，$X_{\tau+1}$，$\cdots$ 所确定的，即 $B\in\mathscr{F}(X_\tau, X_{\tau+1}, \cdots)$，则称 B 是 **τ 后事件**。

设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是齐次马氏链，状态空间为 S，如果对任何 X 的停时 τ，任何 τ 前事件 A 与 τ 后事件 B 及任何 $i\in S$，都有

$$P(B|A,X_\tau=i)=P(B|X_\tau=i) \tag{26}$$

成立，则称马氏链 X 具有**强马尔科夫性**。下面的定理断言离散参数的齐次马氏链必有强马氏性。

定理6 设 τ 是齐次马氏链 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 的停时，则对任何 τ 前事件 A 及任何 i，$j\in S$，如果 $P(A, X_\tau=i)>0$，必有

$$P(X_{\tau+1}=j|A,X_\tau=i)=P(X_{\tau+1}=j|X_\tau=i)=p_{ij} \tag{27}$$

证 $P(A, X_\tau=i, X_{\tau+1}=j)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(A, X_\tau=i, X_{\tau+1}=j, \tau=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(A, X_n=i, \tau=n)\ P(X_{n+1}=j|A, X_n=i, \tau=n),$$

由 τ 前事件的定义，$A\cap(\tau=n)\in\mathscr{F}(X_K, 0\leqslant K\leqslant n)$，再由定理1的注4便知

$$P(X_{n+1}=j|A,X_n=i,\tau=n)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)=p_{ij}$$

代入前式得

$$P(A,X_\tau=i,X_{\tau+1}=j)=p_{ij}\sum_{n=0}^{\infty}P(A,X_n=i,\tau=n)$$

$$=p_{ij}P(A,X_\tau=i)。$$

此等式对任何 τ 前事件 A 都成立，特别地对 $A=\Omega$ 也应成立，式（27）得证。

定理7 设 τ 是齐次马氏链 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 的停时，任给 τ 前随机事件 A，对任一正整数 $m>1$ 及任何 $i_0, i_1, \cdots, i_m\in S$，如果 $P(A, X_\tau=i_0, X_{\tau+1}=i_1, \cdots, X_{\tau+m-1}=i_{m-1})>0$，则有

$$\begin{aligned}&P(X_{\tau+1}=i_1, \cdots, X_{\tau+m}=i_m|A, X_\tau=i_0)\\ &=P(X_{\tau+1}=i_1, \cdots, X_{\tau+m}=i_m|X_\tau=i_0)\\ &=p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{m-1}i_m}。\end{aligned} \tag{28}$$

特别地，有

$$P(X_{\tau+m}=i_m|A,X_\tau=i_0)=P(X_{\tau+m}=i_m|X_\tau=i_0)=p_{i_0i_m}^{(m)}。 \tag{29}$$

证 $P(X_{\tau+1}=i_1, \cdots, X_{\tau+m}=i_m|A, X_\tau=i_0)$

$$=P(X_{\tau+m}=i_m|A, X_\tau=i_0, X_{\tau+1}=i_1, \cdots, X_{\tau+m-1}=i_{m-1})$$

$$\times P(X_{\tau+m-1}=i_{m-1}|A,\ X_\tau=i_0,\ X_{\tau+1}=i_1,\ \cdots,\ X_{\tau+m-2}=i_{m-2})$$
$$\cdots P\ (X_{\tau+1}=i_1|A,\ X_\tau=i_0)$$
$$=p_{i_0i_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{m-1}i_m}。$$

上式最后一个等号成立的根据是：对任给的正整数 $K\leqslant m$，$\tau+K$ 都是马氏链的停时，而且 $\{A,\ X_\tau=i_0,\ X_{\tau+1}=i_1,\ \cdots,\ X_{\tau+K-1}=i_{K-1}\}$ 是 $\tau+K$ 前事件，以及式（27）。

将式（28）两边对 $i_1,\ \cdots,\ i_{m-1}\in S$ 求和，由概率的完全可加性及式（15）即得式（29）。定理证完。

利用概率的连续性以及式（28）即得下列推论。

推论 设 τ 是一齐次马氏链的停时，A 是 τ 前事件，对任一状态序列 $\{i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i_m,\ \cdots\}\subset S$，如果 $P(A,\ X_\tau=i_0)>0$，则有

$$\begin{aligned}P(X_{\tau+1}&=i_1,\cdots,X_{\tau+m}=i_m,\cdots|A,X_\tau=i_0)\\&=P(X_{\tau+1}=i_1,\cdots,X_{\tau+m}=i_m,\cdots|X_\tau=i_0)\\&=\prod_{m=1}^{\infty}p_{i_{m-1}i_m}。\end{aligned}\tag{30}$$

利用在定理1的证明中所使用的 λ-系方法，以及定理7的结论，便可论证下面的定理

定理8 设 τ 是一齐次马氏链的停时，又 A 与 B 分别依次是 τ 前与 τ 后随机事件，如果对任何 $i\in S$，$P(A,\ X_\tau=i)>0$，则有

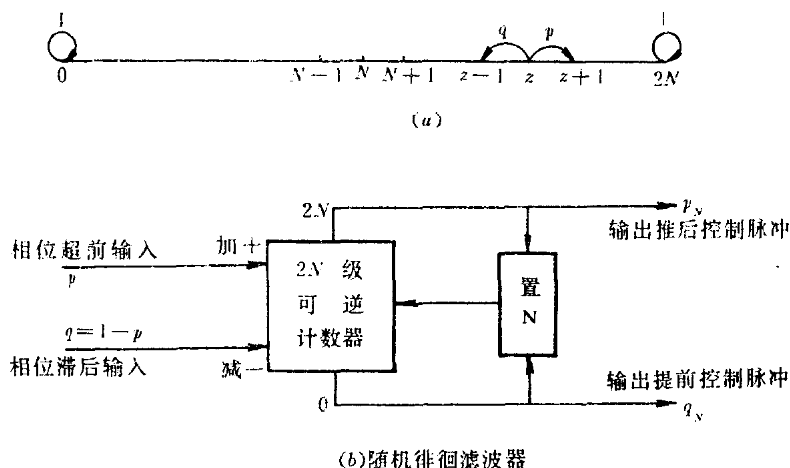
$$P(B|A,X_\tau=i)=P(B|X_\tau=i)。\tag{31}$$

注 定理8指出离散参数马氏链必为强马氏链。一般情形下，强马氏过程显然为马氏过程，但是反之未必成立，强马氏性与马氏性是有本质差异的两种概率特性。

§5 马尔科夫链模型

本节将对一类实际问题，介绍如何去定量描述、分析处理的几个例子，而这些具体问题都是以马氏链作为自己的数学模型的。

例1 （**随机徘徊滤波器**）[21] 对一系统接连不断地输入一串脉冲序列，自然脉冲相位可能超前也可能滞后，经过一段时间之后的叠加可能出现过于超前或过于滞后的现象，因而造成较大的误差，于是必需设法加以控制，那么首先就应建立一个准则判断何时过于超前何时过于滞后以便随时修正。为此可利用如下的数学模型，即著名的**赌徒输光问题**，设有一质点 M 开始位于数轴的正整数点 N 处（这表示赌徒 M 开始有 N 元），以后 M 在数轴的整数点 $\{0,\ 1,\ \cdots,\ z,\ \cdots,\ 2N\}$ 上作每次向右或向左仅移一格的随机徘徊运动，见图2（a），若 M 现在 z 处，$0<z<2N$（表示赌徒 M 现有 z 元），那么在下一步 M 总是以概率 p 到达 $z+1$处，以概率 q 到达 $z-1$处（表示在每一局赌博中赌徒总是以概率 p 赢一元以概率 q 输一元），$p+q=1$，一旦质点在未到达$2N$ 处之前先到达0处，将永远停留在0处，运动告终（表示赌徒 M 输光，赌博结束），如果质点在未到达0处之前先到达$2N$ 处，质点将永远停留在$2N$ 处，运动也即停止（表示赌徒 M 以净赢 N 元而结束这场赌博）。借助于上述模型便可设计制造出如图2（b）所示的随机徘徊滤波器。$2N$ 级可逆计数器开始置为 N（相当于质点 M 开始位于 N 处），以概率 p 有一相位超前的输入脉冲，以概率 $q=(1-p)$ 有一相位滞后的输入脉冲（相当于质点 M 现在不论在 $\{1,\ \cdots,\ 2N-1\}$ 中的何处，下一步向右移一格的概



(b)随机徘徊滤波器

图 2

率总为 p，向左移一格的概率总为 q)。在计数器中对相位超前输入施行加法运算，对相位滞后输入施行减法运算，一旦计数器上的计数达到0（相当于质点未到达$2N$ 处之前先到达0处)，这表示净相位滞后的脉冲个数达到 N，则判断为相位过于滞后，即输出一需提前的控制脉冲，同时将计数器上的记数重新置于 N；一旦计数器上的记数达到$2N$（相当于质点未到达0处之前先到达$2N$ 处)，这表示净相位超前的脉冲个数达到 N，则判断为相位过于超前，即输出一需推后的控制脉冲，同时将计数器的记数重新置于 N，如此周而复始地工作可达到控制的目的。

若以 X_n 表示在 $\{0, 1, \cdots, 2N\}$ 上作随机徘徊运动的质点 M 经 n 步转移后所处的位置或状态，那么 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 就是以 $\{0, 1, \cdots, 2N\}$ 为状态空间的随机序列。因为质点下一步将到达的位置仅与它现在所处的位置有关，而与它以前所经过的位置无关，而且不论何时质点总是以同样的概率 p 与 q 分别依次向右或向左移动一个单位，一旦质点到达$2N$ 处或0处，将永远停留在原处，这一运动概率特征不随时间而变，所以 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是一齐次有限马氏链，它的一步转移概率矩阵是

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdots \\ 2N-2 \\ 2N-1 \\ 2N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2N-2 & 2N-1 & 2N \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{32}$$

记 q_z 与 P_z 分别依次为质点 M 从 z 处（$0\leqslant z\leqslant 2N$）出发，最终到达0处与$2N$ 处的概率，即马氏链从状态 z 出发，分别最终到达状态0与状态$2N$ 的概率。则当 $p\neq q$ 时，有（参看Ⅳ.例4）

$$q_z=\frac{(q/p)^{2N}-(q/p)^z}{(q/p)^{2N}-1},\quad p_z=\frac{(q/p)^z-1}{(q/p)^{2N}-1};\tag{33}$$

当 $p=q=1/2$时，有

$$q_z=1-\frac{z}{2N},\quad p_z=\frac{z}{2N}。\tag{34}$$

由式（33）、（34）易见：无论 $p\neq q$ 还是 $p=q$，对任何 $z\in\{0,\cdots,2N\}$都有 $q_z+p_z=1$。这表示马氏链无论从哪个状态 z 出发，最终必定要到达状态0或$2N$，不可能在｛1，2，…，$2N-1$｝中作永无止境的随机徘徊。特别地，$q_N+p_N=1$，这表示随机徘徊滤波器必定有提前或退后控制脉冲输出的。

记 Y_z 为质点从 z 处（$0\leqslant z\leqslant 2N$）出发，首次到达0处或$2N$ 处所需的步数，即马氏链从状态 z 出发首次达到状态0或$2N$ 的转移步数，显然 Y_z 是随机变量，其数学期望记为 $T_z=EY_z$，则有[10]

$$T_z=\begin{cases}\dfrac{z}{q-p}-\dfrac{2N}{q-p}\cdot\dfrac{1-(q/p)^z}{1-(q/p)^{2N}}, & p\neq q,\\ z(2N-z), & p=q。\end{cases}\tag{35}$$

于是 T_z 为马氏链从 z 出发首次到达0或$2N$ 的所需的平均转移步数。特别地，T_N 是$2N$ 级可逆计数器开始计数为 N，以后计数首次达到0或$2N$，从而使滤波器有一输出的所需输入脉冲的平均个数。随机徘徊滤波器的概率特性完全由马氏链所表征，而 q_z、p_z、T_z（$0\leqslant z\leqslant 2N$）是刻画滤波器的重要数字特征。

例2（爱伦菲斯特（Ehrenfest）模型） 为了定量地描绘气体分子间的热传导现象，考虑如下理想化的模型，设一容器中有$2N$ 个分子作随机的流动，设想有一个并不存在的界面将此容器分为相等的左右两部分，均衡时每一部分中都包含 N 个分子。假定分子每次流动时，同时有两个分子从左方流到右方或从右方流到左方，或一个从左方流到右方，同时另一个从右方流到左方都不可能发生，亦即无论对哪一方，每次只能发生增加一个或减少一个分子的变化，现用 X_n 表示 n 次流动后右方所含分子数与 N 的差 i，$-N\leqslant i\leqslant N$，在前面所述的假定下，X_{n+1}是 $i+1$还是 $i-1$只与 $X_n=i$ 有关，而与 X_0，…，X_{n-1}的取值无关，故｛X_n，$n=0$，1，…｝具有马氏性。当$0<i\leqslant N$ 时，右方的分子数比左方的多，由于分子的流动是随机的，因而从右方流向左方一个分子的概率要比从左方流向右方一个分子的概率大，并且经验告诉我们大小的程度应与右方与左方分子数之差 $(i+N)-[2N-(i+N)]=2i$ 成正比，即 $p_{i\,i-1}-p_{i\,i+1}$与 i 成正比。当$-N\leqslant i<0$时，对称地有类似的解释。分子流动的这一概率法则始终一样不随时间而变，故｛X_n，$n=0$，1，…｝是状态空间为｛$-N$，$-N+1$，…，$N-1$，N｝的齐次马氏链。而且其一步转移概率可由下式给出

$$\begin{cases}p_{ii}=0, & -N\leqslant i\leqslant N,\\ p_{i\,i-1}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{i}{N}\right), & -N+1\leqslant i\leqslant N,\\ p_{i\,i+1}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{i}{N}\right), & -N\leqslant i\leqslant N-1。\end{cases}\tag{36}$$

这样规定的转移概率当$0<i\leqslant N$ 时，$p_{i\,i-1}>\frac{1}{2}$，$p_{i\,i+1}<\frac{1}{2}$，而且 $p_{i\,i-1}-p_{i\,i+1}=\frac{i}{N}$与 i 的确成正比，当$-N\leqslant i<0$时，也有完全对称的论断，式（36）近似地刻画出气体分子间热传导现象的主要统计规律。

例3（分支过程） 为了定量地描写粒子在核反应中不断分裂的过程，不妨假设初始恰有一个粒子，记作 $X_0=1$，经过一次核反应后，分裂产生出第一代粒子，其个数记作 X_1，显然 X_1是一随机变量，其分布记为

$$p_i = P(X_1 = i), \quad i = 0,1,\cdots。 \tag{37}$$

除非 $X_1=0$，否则第一代的每个粒子再经过一次核反应后，都将以同样的概率分布（37）分裂产生出第二代粒子，而且假定第一代中的各个粒子分裂与否或分裂出多少粒子都是相互独立的。如果确知第一代的粒子数为 K，这 K 个粒子各自分裂产生第二代的粒子数分别依次记为 Y_1，Y_2，…，Y_K，那么 Y_1，…，Y_K 便是 K 个相互独立的具有相同分布（37）的随机变量，而且第二代粒子的总数为 $X_2=Y_1+\cdots+Y_K=Y_1+\cdots+Y_{X_1}$，如此经过多次核反应多次分裂，一般地第 $n+1$代粒子总数应是 $X_{n+1}=Y_1+\cdots+Y_{X_n}=\sum\limits_{j=1}^{X_n}Y_j$，$n=0$，1，…。一旦知道了 X_n 的确切取值，不论过去历代裂变粒子数目：X_0，X_1，…，X_{n-1}的演变情况如何，下一代粒子总数 X_{n+1}的分布完全由目前这一代粒子总数 X_n 所决定，因此随机序列 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 具有马氏性，又因为从一代裂变到下一代都遵循着同样的统计规律，即 $\{Y_1, Y_2, \cdots\}$ 是独立同分布的，于是 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是齐次马氏链。为求此链的一步转移概率，记分布（37）$\{p_0, p_1, \cdots\}$ 的母函数为 $G(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_iz^i$，它在 $|z|\leqslant 1$上一致收敛且绝对收敛。因为取非负整数值的随机变量的分布唯一地由其母函数所决定，故此 $G(z)$ 是每个 Y_1，Y_2，…的母函数，又根据定理：i 个相互独立取非负整数为值的随机变量之和的母函数为各自母函数的乘积，那么在已知 $X_n=i$ 的条件下，$X_{n+1}=Y_1+\cdots+Y_{X_n}=Y_1+\cdots+Y_i$ 的母函数为 $(G(z))^i$，于是对任何非负整数 n，有

$$\begin{cases} p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i) = (G(z))^i \text{ 的幂级数展开式中 } z^j \text{ 的系数} \\ \qquad\qquad i=1, 2, \cdots, j=0, 1, \cdots, \\ p_{0j}=0, \ j=1, 2, \cdots \\ p_{00}=1。 \end{cases} \tag{38}$$

例4（排队模型） 某电话交换台不时接到要求通话的呼唤，如果现在交换台正为一呼唤服务，即让它占线通话，那么在它之后来到的呼唤将依次排队等候，当对此呼唤服务完毕，即对紧接其后的呼唤服务，如果尚无排队的呼唤，那么交换台将等待下一个呼唤的到来，规定交换台为每个呼唤服务皆为一个单位时间。对 $n=1$，2，…，若以 X_n 表示交换台对第 n 个呼唤服务完毕时，后续排队等候的呼唤个数，又以 Y_n 表示交换台在为第 $n+1$个呼唤服务期间来到的呼唤个数，并假设 $\{Y_n, n=1, 2, \cdots\}$ 是服从同一个参数 λ（>0）的普阿松（Poisson）分布 $\pi(\lambda)$ 的独立随机变量序列，于是有

$$X_1 = Y_1, \quad X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + Y_n, \quad n = 1,2,\cdots, \tag{39}$$

其中
$$(X_n-1)^+=\begin{cases} X_n-1 & \text{当 } X_n-1\geqslant 0, \\ 0 & \text{当 } X_n-1<0。 \end{cases}$$

由 $\{Y_n, n=1, 2, \cdots\}$ 的独立性及 $X_1=Y_1$，一旦知道 X_n 的确切取值，那么 X_{n+1}与 $(X_1, \cdots, X_{n-1})$ 相互独立，故 $\{X_n, n=1, 2, \cdots\}$ 是状态空间为 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 的马氏链。又由式（39）及独立性得

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P((X_n - 1)^+ + Y_n = j|X_n = i)$$

$$= P(X_n = i, Y_n = j - (i-1)^+)/P(X_n = i)$$
$$= P(Y_n = j - (i-1)^+),$$

既然 Y_n 服从普阿松分布 π（λ），故从上式得：

$$_n p_{ij} = \begin{cases} P(Y_n = j) = \lambda^j e^{-\lambda}/j!, & i = 0,1,\ j = 0,1,\cdots, \\ P(Y_n = j - i + 1) = \lambda^{j-i+1} e^{-\lambda}/(j-i+1)!, & i = 2,3,\cdots, j = 0,1,\cdots, \\ & j \geqslant i-1 \\ 0, & 0 \leqslant j < i-1。 \end{cases} \tag{40}$$

$[_n p_{ij}]$ 就是 $\{X_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 的一步转移概率矩阵，而且式（40）表明它与 n 无关，故 $\{X_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是齐次马氏链。

例5（水库贮水模型）　某水库所在地区每年的降雨量为独立同分布的随机变量。令 Y_n 表示第 n 年降雨使水库增加的贮水量，而 X_n 表示第 n 年开始时水库的贮水量，假定水库容量是 k 个单位，又每年放水都按如下规定执行：若水库内存水量超过 M（$<K$）个单位，就一定放足 M 个单位，若存水量少于 M 个单位，则有多少就放多少。因此第 n 年的放水量为 min（M，X_n+Y_n），而第 $n+1$ 年初水库的贮水量为

$$X_{n+1} = \min(K, X_n + Y_n) - \min(M, X_n + Y_n), \quad n \geqslant 1, \tag{41}$$

K 与 M 都是确定的常值，$\{Y_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是相互独立的随机变量序列，因此 X_{n+1} 完全由 X_n 所决定，并且 X_{n+1} 与（X_1，$\cdots$，X_{n-1}）独立无关，故 $\{X_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是状态空间为 $\{0,\ 1,\ \cdots,\ K-M\}$ 的马氏链。为求此链的一步转移概率，对 $j=0,\ 1,\ \cdots$，及 $n=1,\ 2,\ \cdots$，令

$$p_j = P(Y_n = j);\ G_j = \sum_{k=0}^{j} p_K = P(Y_n \leqslant j);\ H_j = \sum_{K=j+1}^{\infty} p_K = P(Y_n > j)。$$

由式（41），在 $X_n=0$ 的条件下要使 $X_{n+1}=0$ 应要求 $Y_n \leqslant M$，故对任何 $n=1,\ 2,\ \cdots$，有

$$_n p_{00} = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = P(Y_n \leqslant M) = G_M。$$

仍由式（41），在 $X_n=1$ 的条件下要使 $X_{n+1}=K-M-1$，即要求 $\min(K,\ 1+Y_n) - \min(M,\ 1+Y_n) = K-M-1$，于是有 $Y_n=K-2$，故 $_n p_{1\,K-M-1} = P(X_{n+1}=K-M-1 | X_n=1) = P(Y_n = K-2) = p_{K-2}$，$n \geqslant 1$。再由式（41），在 $X_n=M$ 的条件下，要使 $X_{n+1}=K-M$，即 $\min(K,\ M+Y_n) - \min(M,\ M+Y_n) = K-M$，即要求 $Y_n \geqslant K-M$，故

$$_n P_{M\,K-M} = P(X_{n+1} = K-M | X_n = M) = P(Y_n \geqslant K-M) = H_{K-M-1}, \quad n \geqslant 1。$$

其它的 $_n p_{ij}$，i，$j \in \{0,\ 1,\ \cdots,\ K-M\}$ 类似地可求出。从而得到一步转移概率矩阵为

$$[_n p_{ij}] = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \\ M+1 \\ \vdots \\ K-M \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & K-M-1 & K-M \\ G_M & p_{M+1} & \cdots & p_{K-1} & H_K \\ G_{M-1} & p_M & \cdots & p_{K-2} & H_{K-1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_0 & p_1 & \cdots & p_{K-M-1} & H_{K-M} \\ 0 & p_0 & \cdots & p_{K-M-2} & H_{K-M-1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{M-1} & H_M \end{bmatrix}, n \geqslant 1。 \tag{42}$$

由式（42）知 $[_n p_{ij}]$ 实际上与 n 无关，故此马氏链还是齐次的。

独立同分布的随机变量序列在理论与应用上一直是人们十分注视的研究对象，现在我们来阐明它与马氏链的密切关系作为本章的结束。

现设 S 为所有整数构成的集，又 $\{Y_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是独立随机变量序列，而且 $\{Y_n, n=1, 2, \cdots\}$ 具有相同的分布：$\{p_i, i\in S\}$。现在定义：$X_n=\sum_{K=0}^{n}Y_K$，$n=0, 1, \cdots$。由此定义及 $\{Y_n, n=0, 1, \cdots\}$ 的独立性假定，知 $X_{n+1}=X_n+Y_{n+1}$，$n=0, 1, \cdots$，而且 Y_{n+1} 与 $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ 独立，于是对任何 $n=0, 1, \cdots$，任何 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j\in S$，有

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = j|X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)\\
&= P(Y_{n+1} = j - i|X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)\\
&= P(Y_{n+1} = j - i) = p_{j-i}
\end{aligned}
$$

由此可见 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是以 S 为状态空间的齐次马氏链。其一步转移概率为

$$
{}_n p_{ij} = p_{ij} = p_{j-i},\ n = 0,1,\cdots,\ i,j \in S \tag{43}
$$

因为 p_{ij} 只依赖于差 $j-i$，具有这样特性的一类链称为**空间齐次的**。容易看出这个时间齐次又空间齐次的马氏链的初始分布，即 $X_0=Y_0$ 的分布不必与 $\{p_i, i\in S\}$ 相同。

反之，假设 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是状态空间为 S 的时间齐次的马氏链，而且其一步转移概率 p_{ij}，$i, j\in S$ 具有式（43）所给的形式，于是对任何 $n=0, 1, \cdots$，任何 $i, K\in S$，有

$$
\begin{aligned}
P(X_{n+1} - X_n = K|X_n = i) &= P(X_{n+1} = i + K|X_n = i)\\
&= p_{ii+K} = p_K。
\end{aligned} \tag{44}
$$

令 $Y_{n+1}=X_{n+1}-X_n$，$n=0, 1, \cdots$，由式（44），对任何 $K\in S$，有

$$
\begin{aligned}
P(Y_{n+1} = K) &= \sum_{i\in S}P(X_{n+1} - X_n = K, X_n = i)\\
&= \sum_{i\in S}P(X_n = i)P(X_{n+1} - X_n = K|X_n = i) = p_K,
\end{aligned}
$$

即 $\{Y_n, n=1, 2, \cdots\}$ 具有相同的分布 $\{p_K, K\in S\}$。

对任一正整数 n，任何 $i_1, \cdots, i_n\in S$，因为马氏性及式（43）

$$
\begin{aligned}
P(Y_1 = i_1, \cdots, Y_n = i_n) &= P(X_1 - X_0 = i_1, \cdots, X_n - X_{n-1} = i_n)\\
&= \sum_{j\in S}P(X_0 = j, X_1 = j + i_1, X_2 = j + i_1 + i_2, \cdots, X_n = j + i_1 + \cdots + i_n)\\
&= \sum_{j\in S}P(X_0 = j)P(X_1 = j + i_1|X_0 = j)P(X_2 = j + i_1 + i_2|X_1 = j + i_1)\\
&\quad \cdots P(X_n = j + i_1 + \cdots + i_n|X_{n-1} = j + i_1 + \cdots + i_{n-1})\\
&= \sum_{j\in S}P(X_0 = j)p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}\\
&= P(Y_1 = i_1)P(Y_2 = i_2)\cdots P(Y_n = i_n)。
\end{aligned}
$$

这表明 $\{Y_n, n=1, 2, \cdots\}$ 是独立的随机变量序列。

综上所证，从结构上看可断定一个在整数集中取值的时间齐次同时又是空间齐次的马氏链等同于一个独立、同分布、取整数为值的随机变量序列的前面 n 项部分和序列。

第二章　状态的分类

本章将从齐次马氏链的转移概率出发，建立若干有意义的数字特征，用它们来表示各个状态的属性，以便将所有状态按其概率特性加以区别，并从整体上进行分类，进而揭示出齐次马氏链的基本结构。

§1　状态的基本属性

1. 可达关系

本节首先从描述齐次马氏链状态之间的概率关联性上，引出几个基本的也很直观的概念。

定义　设 S 是一离散参数齐次马氏链的状态空间，n 步转移概率矩阵为 $[p_{ij}^{(n)}]$，对给定的状态 i，$j\in S$，如果存在某个正整数 n 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$，则称**自 i 可达到 j**，记作 $i\Rightarrow j$。如果 $i\Rightarrow j$，$j\Rightarrow i$ 同时成立，则称 i 与 j **互通**，记作 $i\Leftrightarrow j$。对给定的状态 i，如果对任何状态 $j\in S$，只要 $i\Rightarrow j$ 必导致有 $j\Rightarrow i$，则称 i 是**本质的**，倘若有 $j\in S$ 使得 $i\Rightarrow j$，但 $j\not\Rightarrow i$，则称 i 是**非本质的**。

定理 1　任给状态 $i,j,k\in S$，如果 $i\Rightarrow j$ 且 $j\Rightarrow k$ 则 $i\Rightarrow k$。

证　由假设与定义存在正整数 n，m 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$，$p_{jk}^{(m)}>0$，再由 C-K 方程有 $p_{ik}^{(n+m)}\geqslant p_{ij}^{(n)}p_{jk}^{(m)}>0$，故 $i\Rightarrow k$。

定理 1 表明可达关系“$\Rightarrow$”是传递的，从而互通关系“$\Leftrightarrow$”也是传递的，显然互通关系还是对称的，但未必是自反的，因为存在这样的状态 k，对一切正整数 n 都有 $p_{kk}^{(n)}=0$，那么此状态 k 不能与任何状态互通。

定理 2　如果状态 i 是本质的，又 $i\Rightarrow j$，则状态 j 也是本质的。

证　若对状态 k 有 $j\Rightarrow k$，因为假设 $i\Rightarrow j$，由定理 1 知 $i\Rightarrow k$，又因 i 是本质的，所以 $k\Rightarrow j$，再由假设 $i\Rightarrow j$ 及定理 1 得 $k\Rightarrow j$，依定义 j 是本质的。

2. 几个特征量

其次将运用有一定限制的状态转移的条件概率来给出几个描绘状态概率属性的重要数

字特征。以后如无特别申明，总设 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是状态空间为 S 的齐次马氏链，对任意给定的 i，$j\in S$，总假定 $P(X_0=i)>0$。

(1) 记

$$f_{ij}^{(1)} \triangleq P(X_1=j|X_0=i)=p_{ij}, \tag{1}$$

$$f_{ij}^{(n)} \triangleq P(X_m\neq j,1\leqslant m\leqslant n-1;\quad X_n=j|X_0=i),\ n=2,3,\cdots, \tag{2}$$

$$f_{ij}^{(\infty)} \triangleq P(\bigcap_{m=1}^{\infty}(X_m\neq j)|X_0=i), \tag{3}$$

$$f_{ij} \triangleq P(\bigcup_{m=1}^{\infty}(X_m=j)|X_0=i), \tag{4}$$

$$\mu_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}。 \tag{5}$$

以上各式定义的数字特征的概率意义是明显的，$f_{ij}^{(n)}$ 是在系统初始处于状态 i 的条件下，于第 n 步系统首次达到状态 j 的条件概率；$f_{ij}^{(\infty)}$ 是在前面同样的条件下，系统永远也不能达到状态 j 的概率；f_{ij} 是在前面同样的条件下，经有限多步转移系统终于要达到状态 j 的条件概率。由所述的概率意义及马氏性、齐次性即得：

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= P(X_{m+l}\neq j,1\leqslant l\leqslant n-1;X_{m+n}=j|X_m=i)\\ &= \sum_{\substack{j_l\neq j\\ 1\leqslant l\leqslant n-1}} p_{ij_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}j}\\ &= \sum_{j_1\neq j} p_{ij_1}f_{j_1j}^{(n-1)}。\qquad n\geqslant 2,m\geqslant 0,\quad P(X_m=i)>0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$f_{ij}+f_{ij}^{(\infty)}=1,\quad 或\quad f_{ij}^{(\infty)}=1-f_{ij}, \tag{7}$$

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}。 \tag{8}$$

一般概率 $f_{ij}\leqslant 1$，故式(8)中非负数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 必收敛，其和为 f_{ij}，一旦 $f_{ij}=1$，这时 $\{f_{ij}^{(n)}, n=1, 2, \cdots\}$ 便是一概率分布，而 μ_{ij} 正是该分布的数学期望，即 μ_{ij} 是在系统初始处于状态 i 的条件下，首次达到状态 j 所需的平均步数。特别地，当 $f_{ii}=1$ 时，称 μ_{ii} 为状态 i 的平均回转时间。

(2) 类比于式(1)、(2)、(8)，令

$$g_{ij}^{(1)} \triangleq P(X_1=j|X_0=i)=p_{ij}, \tag{9}$$

$$g_{ij}^{(n)} \triangleq P(X_m\neq i,1\leqslant m\leqslant n-1;\quad X_n=j|X_0=i),\ n=2,3,\cdots, \tag{10}$$

$$g_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)}。 \tag{11}$$

对 $n\geqslant 2$，$g_{ij}^{(n)}$ 表示在系统初始处于状态 i 的条件下，经 n 步转移系统达到状态 j，而在此期间再没有经过 i 的条件概率。事实上 g_{ij} 可看作是在系统初始处于状态 i 的条件下，于系统再次达到状态 i 之前，系统达到状态 j 的期望次数。与 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 不同，一般说来 $\sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)}$ 此非负数项级数未必收敛，即 g_{ij} 未必有限。显然，

$$g_{ii}^{(n)}=f_{ii}^{(n)},\qquad n=1,2,\cdots;\quad g_{ii}=f_{ii}。 \tag{12}$$

(3) 与式(4)对比，可引出如下有意义的数字特征，

记

$$e_{ij} \triangleq P(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}(X_n=j)|X_0=i)$$

$$=P(\text{有无穷多个 } n\geqslant 1 \text{ 使 } X_n=j|X_0=i),\tag{13}$$

e_{ij}表示在系统初始处于状态 i 的条件下，以后系统有无穷多次达到状态 j 的条件概率。换一种说法，若令 N_j 为状态 j 在$\{X_0,X_1,\cdots\}$中出现的次数，则 $N_j=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_{jX_n}$ 是一随机变量，其中

$$\delta_{jk}\triangleq\begin{cases}1, & \text{当 } k=j,\\ 0, & \text{当 } k\neq j,\end{cases}$$

而且

$$e_{ij}=P(N_j=\infty|X_0=i),\quad f_{ij}=P(N_j\geqslant 1|X_0=i)\tag{14}$$

(4) 我们还可定义若干刻画状态属性的随机变量。令

$$T_j\triangleq\begin{cases}\min\{n\geqslant 1:X_n=j\}, & \text{当}\{n\geqslant 1:X_n=j\}\neq\varnothing\\ \infty, & \text{当}\{n\geqslant 1:X_n=j\}=\varnothing\end{cases}\tag{15}$$

依此定义，对任一正整数 n，有

$$\{T_j=n\}=\{X_m\neq j,1\leqslant m\leqslant n-1,X_n=j\}\in\mathscr{F}\{X_1,\cdots,X_n\}\subset\mathscr{F},$$

所以 T_j 不仅是一随机变量而且是 X 的停时。由式(15)直观地应称 T_j 为首次达到状态 j 的时间。由 T_j 及 $f_{ij}^{(n)}$、f_{ij}、$f_{ij}^{(\infty)}$的概率意义即得：

$$f_{ij}^{(n)}=P(T_j=n|X_0=i),\quad n=1,2,\cdots,\tag{16}$$

$$f_{ij}=P(T_j<\infty|X_0=i),\tag{17}$$

$$f_{ij}^{(\infty)}=P(T_j=\infty|X_0=i)。\tag{18}$$

(5) 对任给的非负整数 n，令

$$U_i^{(n)}\triangleq\max\{0\leqslant m\leqslant n:\ X_m=i\}。\tag{19}$$

当 $n=0$ 时，对任一非负整数 l，有

$$\{U_i^{(0)}=l\}=\begin{cases}\{X_0=i\}, & l=0\\ \varnothing, & l\geqslant 1。\end{cases}$$

当 $n\geqslant 1$ 时，对任一非负整数 l，有

$$\{U_i^{(n)}=l\}=\begin{cases}\{\bigcap\limits_{m=0}^{l}(X_m=i)\}\cap(X_{l+1}\neq i), & 0\leqslant l\leqslant n-1,\\ \{\bigcap\limits_{m=0}^{n}(X_m=i)\}, & l=n,\\ \varnothing & l\geqslant n+1。\end{cases}$$

因此 $\{U_i^{(n)}=l\}\in\mathscr{F}(X_0,\cdots,X_{l+1})$，故 $U_i^{(n)}$ 是随机变量。实际上，$U_i^{(n)}$ 表示系统初始从状态 i 出发，在给定时间 n 及 n 之前系统最后离开状态 i 的时间，显然 $U_i^{(n)}$ 有赖于 n。

(6) 最后再给出两个有用的数字特征。如果正整数集 $\{n:\ n\geqslant 1$，并使 $p_{ii}^{(n)}>0\}$ 非空，记它的最大公约数为 d_i，即

$$d_i\triangleq \text{G. C. D. }\{n:n\geqslant 1,\text{并使 } p_{ii}^{(n)}>0\}。\tag{20}$$

如果正整数集 $\{n:\ n\geqslant 1$，并使 $f_{ii}^{(n)}>0\}$ 非空，记它的最大公约数为 h_i，即

$$h_i\triangleq \text{G. C. D. }\{n:n\geqslant 1,\text{并使 } f_{ii}^{(n)}>0\}\tag{21}$$

特征量 d_i 与 h_i 反映了在系统的演变过程中，状态 i 重复出现的概率规律。

3. 特征量之间的关系

进而，自然应该讨论在 2 中所定义的诸特征量各自的有关性质，并探求它们相互之间

存在的重要关系式。首先由下列定理给出以后常要用到的 $\{p_{ij}^{(n)}\}$ 与 $\{f_{ij}^{(n)}\}$ 之间的关系式。

定理 3 对任给的状态 i，$j\in S$，以及任给的正整数 n，有

$$0\leqslant f_{ij}^{(n)}\leqslant p_{ij}^{(n)}\leqslant f_{ij}\leqslant 1, \tag{22}$$

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{m=1}^{n}f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)} \tag{23}$$

证 由 $f_{ij}^{(n)}$、$p_{ij}^{(n)}$、f_{ij}的概率意义立即可得式(22)，再由 T_j 的定义，又注意到$(X_n=j)\subset(T_j\leqslant n)$，并利用概率的有限可加性及 X 的马氏性、齐次性，便有

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)}&=P(X_n=j|X_0=i)=P(T_j\leqslant n,X_n=j|X_0=i)\\
&=\sum_{m=1}^{n}P(T_j=m,X_n=j|X_0=i)\\
&=\sum_{m=1}^{n}\frac{P(X_0=i,T_j=m)}{P(X_0=i)}\cdot\frac{P(X_0=i,T_j=m,X_n=j)}{P(X_0=i,T_j=m)}\\
&=\sum_{m=1}^{n}P(T_j=m|X_0=i)P(X_n=j|X_m=j)\\
&=\sum_{m=1}^{n}f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}。
\end{aligned}$$

式(23)的概率直观意义是系统自状态 i 出发经 n 步转移到达状态 j 的概率等于系统自状态 i 出发先经 m 步首次到达状态 j，然后系统再自状态 j 经 $n-m$ 步仍回到状态 j 的概率 $f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}$对 $m=1$，…，n 所有可能的项之和。值得指出的是式(23)的证明本质上要用到马氏性，对一般的随机序列是未必成立的。

定理 4（杜伯林（Doeblin）公式） 对任给的状态 i，$j\in S$，则有

$$f_{ij}=\lim_{L\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}}。 \tag{24}$$

证 由式（23），取正整数 L'、L：$1<L'<L$，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}&=\sum_{n=1}^{L}\sum_{m=1}^{n}f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}=\sum_{m=1}^{L}\Big(f_{ij}^{(m)}\sum_{n=m}^{L}p_{jj}^{(n-m)}\Big)\\
&\geqslant\sum_{m=1}^{L'}\Big(f_{ij}^{(m)}\sum_{n=L'}^{L}p_{jj}^{(n-L')}\Big)=\Big(1+\sum_{n=1}^{L-L'}p_{jj}^{(n)}\Big)\sum_{m=1}^{L'}f_{ij}^{(m)}。
\end{aligned} \tag{25}$$

对整数 m：$1\leqslant m\leqslant L$，显然有

$$\begin{aligned}
1+\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}&=p_{jj}^{(0)}+p_{jj}^{(1)}+\cdots+p_{jj}^{(L)}\\
&\geqslant p_{jj}^{(0)}+\cdots+p_{jj}^{(L-m)}=\sum_{n=m}^{L}p_{jj}^{(n-m)}。
\end{aligned} \tag{26}$$

将式(26)代入式(25)中便得

$$\Big(1+\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}\Big)\sum_{m=1}^{L}f_{ij}^{(m)}\geqslant\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}\geqslant\Big(1+\sum_{n=1}^{L-L'}p_{jj}^{(n)}\Big)\sum_{m=1}^{L'}f_{ij}^{(m)},$$

用 $\left(1+\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}\right)$ 通除此不等式，就有

$$\sum_{m=1}^{L}f_{ij}^{(m)} \geqslant \frac{\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}} \geqslant \sum_{m=1}^{L'}f_{ij}^{(m)}。\tag{27}$$

在式(27)中，先令 $L\to\infty$，然后再令 $L'\to\infty$，就得到要证的式(24)。

特别地，当 $j=i$ 时，由式(24)即得下面的推论：

推论 1

$$f_{ii} = 1-\lim_{L\to\infty}\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{L}p_{ii}^{(n)}}。\tag{28}$$

再由式(28)即得：

推论 2　非负数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$ 发散的充要条件是 $f_{ii}=1$，或级数 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$ 收敛的充要条件是 $f_{ii}<1$。

现在讨论有关 $\{g_{ij}^{(n)}\}$ 与 $\{p_{ij}^{(n)}\}$、$\{f_{ij}^{(n)}\}$ 之间的关系式。

定理 5　对任给的状态 i，$j\in S$，任给的正整数 n、l 有

(i)　$$g_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\neq i}g_{ik}^{(n)}p_{kj},\tag{29}$$

(ii)　$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1}p_{ii}^{(m)}g_{ij}^{(n-m)},\quad i\neq j,\tag{30}$$

(iii)　$$g_{ij}^{(n)}f_{ji}^{(l)} \leqslant f_{ii}^{(n+l)},\qquad i\neq j,\tag{31}$$

(iv)　$$\sum_{j\in S}g_{ij}^{(n)} = (1-f_{ii})+\sum_{m=n}^{\infty}f_{ii}^{(m)}。\tag{32}$$

证　由 $g_{ij}^{(n)}$ 的定义及 X 的马氏性、齐次性有

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{(n+1)} &= P(X_m\neq i,1\leqslant m\leqslant n;\ X_{n+1}=j|X_0=i)\\
&= \sum_{k\neq j}P(X_m\neq i,1\leqslant m\leqslant n-1;\ X_n=k;\ X_{n+1}=j|X_0=i)\\
&= \sum_{k\neq j}P(X_m\neq i,1\leqslant m\leqslant n-1;\ X_n=k|X_0=i)P(X_{n+1}=j|X_n=k)\\
&= \sum_{k\neq j}g_{ik}^{(n)}p_{kj}。
\end{aligned}$$

式(29)得证。

由 $U_i^{(n)}$ 的定义，当 $i\neq j$ 时，$(X_n=j)\subset(0\leqslant U_i^{(n)}\leqslant n-1)$，故

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n=j|X_0=i)\\
&= P(0\leqslant U_i^{(n)}\leqslant n-1,X_n=j|X_0=i)\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}P(U_i^{(n)}=m,X_n=j|X_0=i)\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}P(X_m=i;X_l\neq i,m+1\leqslant l\leqslant n-1;X_n=j|X_0=i)\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{P(X_0=i,X_m=i;X_l\neq i,m+1\leqslant l\leqslant n-1;X_n=j)}{P(X_0=i,X_m=i)}\cdot\frac{P(X_0=i,X_m=i)}{P(X_0=i)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} P(X_m = i | X_0 = i) P(X_l \neq i, m+1 \leqslant l \leqslant n-1; X_n = j | X_m = i)$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} p_{ii}^{(m)} g_{ij}^{(n-m)}。$$

式(30)得证。

对任给的正整数 n、l，利用 X 的马氏性、齐次性，有

$$f_{ii}^{(n+l)} = \frac{P(X_0 = i, X_1 \neq i, \cdots, X_{n-1} \neq i, X_n \neq i, X_{n+1} \neq i, \cdots, X_{n+l-1} \neq i, X_{n+l} = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$\geqslant \frac{P(X_0 = i, X_1 \neq i, \cdots, X_{n-1} \neq i, X_n = j, X_{n+1} \neq i, \cdots, X_{n+l-1} \neq i, X_{n+l} = i)}{P(X_0 = i, X_1 \neq i, \cdots, X_{n-1} \neq i, X_n = j)}$$

$$\times \frac{P(X_0 = i, X_1 \neq i, \cdots, X_{n-1} \neq i, X_n = j)}{P(X_0 = i)}$$

$$= P(X_m \neq i, 1 \leqslant m \leqslant n-1; X_n = j | X_0 = i)$$

$$\times P(X_m \neq i, n+1 \leqslant m \leqslant n+l-1; X_{n+l} = i | X_n = j)$$

$$= g_{ij}^{(n)} f_{ji}^{(l)}。$$

此即式(31)，(iii)得证。

$$\sum_{j \in S} g_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in S} P(X_l \neq i, 1 \leqslant l \leqslant n-1; X_n = j | X_0 = i)$$

$$= P(X_l \neq i, 1 \leqslant l \leqslant n-1 | X_0 = i) = P(T_i \geqslant n | X_0 = i)$$

$$= P(T_i = \infty | X_0 = i) + \sum_{m=n}^{\infty} P(T_i = m | X_0 = i)$$

$$= f_{ii}^{(\infty)} + \sum_{m=n}^{\infty} f_{ii}^{(m)} = (1 - f_{ii}) + \sum_{m=n}^{\infty} f_{ii}^{(m)}。$$

上式中最后两个等号成立是因为式(16)、(18)与(7)成立，式(32)得证，定理证完。

定理 6　对任给的状态 i，$j \in S$，设数列 $\{p_{ij}^{(n)}, n=0,1,\cdots\}$、$\{f_{ij}^{(n)}, n=0,1,\cdots\}$、$\{g_{ij}^{(n)}, n=0,1,\cdots\}$ 各自的母函数分别依次记为

$$P_{ij}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n, \qquad |z| < 1, \tag{33}$$

$$F_{ij}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n, \qquad |z| < 1, \tag{34}$$

$$G_{ij}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} g_{ij}^{(n)} z^n, \qquad |z| < 1, \tag{35}$$

其中规定：$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$，$f_{ij}^{(0)} = f_{ii}^{(0)} = 0$，$g_{ij}^{(0)} = g_{ii}^{(0)} = 0$，还规定 0^0 为 1，则有

$$P_{ij}(z) = \delta_{ij} + F_{ij}(z) P_{jj}(z), \quad |z| < 1。 \tag{36}$$

特别地，

$$P_{ii}(z) = \frac{1}{1 - F_{ii}(z)} = \frac{1}{1 - G_{ii}(z)}, \quad |z| < 1。 \tag{37}$$

如果 $i \neq j$，则有

$$P_{ij}(z) = P_{ii}(z) G_{ij}(z), \qquad |z| < 1。 \tag{38}$$

证　由规定及式(33)、(23)，有

$$P_{ij}(z)=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{m=1}^{n}f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}\Big]z^{n}。$$

为清楚起见，不妨令 $p_{ij}^{(n)}=g_{ij}^{(n)}=0$，$n=-1$，$-2$，…，那么上式可改写成下面的形式

$$P_{ij}(z)=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}\Big]z^{n},\tag{39}$$

因为对 $n=1$，2，…，$p_{ij}^{(n)}$、$f_{ij}^{(n)}$、$g_{ij}^{(n)}$ 皆为概率，所以当 $z\in(0,1)$ 时，级数(33)、(34)、(35)、(39)皆收敛，从而当 $|z|<1$ 时，它们都绝对收敛，于是可以应用傅比尼 (Fubini) 定理交换式(39)中求和的次序，得

$$\begin{aligned}P_{ij}(z)&=\delta_{ij}+\sum_{m=1}^{\infty}f_{ij}^{(m)}z^{m}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}p_{jj}^{(n-m)}z^{(n-m)}\Big]\\&=\delta_{ij}+\sum_{m=1}^{\infty}f_{ij}^{(m)}z^{m}\Big[\sum_{n=m}^{\infty}p_{jj}^{(n-m)}z^{n-m}\Big]\\&=\delta_{ij}+F_{ij}(z)P_{jj}^{(z)}。\end{aligned}$$

式(36)得证。

当 $j=i$ 时，注意到式(12)，由式(36)即得式(37)。

当 $j\neq i$ 时，由规定及式(33)、(30)知：

$$P_{ij}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}z^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{m=0}^{\infty}p_{ii}^{(m)}g_{ij}^{(n-m)}\Big]z^{n},\quad |z|<1$$

对上式仍可利用傅比尼定理交换求和的次序得

$$\begin{aligned}P_{ij}(z)&=\sum_{m=0}^{\infty}p_{ii}^{(m)}z^{m}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}g_{ij}^{(n-m)}z^{n-m}\Big]\\&=\sum_{m=0}^{\infty}p_{ii}^{(m)}z^{m}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}g_{ij}^{(n-m)}z^{n-m}\Big]\\&=P_{ii}(z)G_{ij}(z)。\end{aligned}$$

式(38)得证，定理证完。

现在可以给出几个利用 f_{ij}、g_{ij}来刻画可达关系的性质了。

定理 7　对任何状态 i，$j\in S$，则 $i\Rightarrow j$ 等价于 $f_{ij}>0$，从而 $i\Leftrightarrow j$ 等价于 $f_{ij}f_{ji}>0$。

证　如果 $i\Rightarrow j$，依定义必有正整数 n 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$，由式(22)知 $f_{ij}\geqslant p_{ij}^{(n)}>0$。反之，如果 $f_{ij}>0$，由式(8)必有正整数 n 使 $f_{ij}^{(n)}>0$，再由式(22)知 $0<f_{ij}^{(n)}\leqslant p_{ij}^{(n)}$，依定义 $i\Rightarrow j$。

因为 $f_{ij}>0$ 同时 $f_{ji}>0$ 等价于 $f_{ij}f_{ji}>0$，于是由前面已证的结论即得后面要证的结论，定理证完。

定理 8　对任何状态 i，$j\in S$，则有：

(i) $i\Rightarrow j$ 等价于 $g_{ij}>0$，从而 $i\Leftrightarrow j$ 等价于 $g_{ij}g_{ji}>0$；

(ii) $g_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty}g_{ii}^{(n)}<\infty$；

(iii) 如果 $j\neq i$，又 $j\Rightarrow i$，则 $g_{ij}<\infty$。

证　如果 $i\Rightarrow j$，则必有正整数 n 使 $p_{ij}^{(n)}>0$，当 $i\neq j$ 时，由式(30)知，必存在 m：$0\leqslant m\leqslant n-1$ 使 $p_{ii}^{(m)}g_{ij}^{(n-m)}>0$，那么 $g_{ij}^{(n-m)}>0$，注意到在这里 $n-m$ 是正整数，于是由式(11)得 $g_{ij}>0$。如果 $i=j$，$i\Rightarrow j$，因式(12)及定理 7，得 $g_{ii}=f_{ii}>0$，总之 $i\Rightarrow j$ 等价于 $g_{ij}>0$，故对称地 $j\Rightarrow i$ 等价于 $g_{ji}>0$，所以 $i\Leftrightarrow j$ 等价于 $g_{ij}g_{ji}>0$。(i)得证。

由式(12)，$g_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty}g_{ii}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}=f_{ii}\leqslant 1$，(ii) 得证。

如果 $j\Rightarrow i$，由定理 7 知 $f_{ji}>0$，再由式(8)必有正整数 l 使 $f_{ji}^{(l)}>0$，若 $j\neq i$，那么根据式(31)对一切正整数 n 都有 $g_{ij}^{(n)}f_{ji}^{(l)}\leqslant f_{ii}^{(n+l)}$成立。于是

$$0\leqslant g_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}g_{ij}^{(n)}\leqslant\frac{1}{f_{ji}^{(l)}}\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n+l)}\leqslant\frac{f_{ii}}{f_{ji}^{(l)}}<\infty,$$

(iii)得证，定理证完。

定理 9 对任意给定的状态 $i,j\in S$，及任意给定的正整数 l，如果齐次马氏链 X 开始处于状态 i，则以后状态 j 至少出现 l 次的概率等于 $f_{ij}(f_{jj})^{l-1}$。特别地，X 从状态 i 出发，返回到状态 i 至少 l 次的概率为$(f_{ii})^l$。

证 记 A_l 是 {至少有 l 个正整数 n 使得 $X_n=j$} 此事件。利用概率的完全可加性、乘法定理，以及 X 的马氏性、齐次性，则有

$$\begin{aligned}P(A_l|X_0=i)=&P(X_1=j,\text{且至少有 }l-1\text{ 个正整数 }n\text{ 使 }X_{1+n}=j|X_0=i)\\&+P(\bigcup_{m=2}^{\infty}(X_t\neq j,1\leqslant t\leqslant m-1;X_m=j,\text{且至少有 }l-1\text{ 个正整数 }n\\&\text{使 }X_{m+n}=j|X_0=i)\\=&P(X_1=j|X_0=i)P(\text{至少有 }l-1\text{ 个正整数 }n\text{ 使 }X_{1+n}=j|X_1=j)\\&+\sum_{m=2}^{\infty}P(X_t\neq j,1\leqslant t\leqslant m-1;X_m=j|X_0=i)\\&\times P(\text{至少有 }l-1\text{ 个正整数 }n\text{ 使 }X_{m+n}=j|X_m=j)\\=&\sum_{m=1}^{\infty}f_{ij}^{(m)}P(A_{l-1}|X_0=j)\\=&f_{ij}P(A_{l-1}|X_0=j)。\end{aligned}\tag{40}$$

因为状态 i 取法的任意性，反复利用式(40)，并注意到 $P(A_1|X_0=j)=f_{jj}$，便得

$$\begin{aligned}P(A_l|X_0=i)&=f_{ij}P(A_{l-1}|X_0=j)\\&=f_{ij}f_{jj}P(A_{l-2}|X_0=j)\\&=\cdots\cdots=f_{ij}(f_{jj})^{l-1}。\end{aligned}\tag{41}$$

特别地，当 $j=i$ 时，由式(41)直接可得

$$P(A_l|X_0=i)=(f_{ii})^l,\tag{42}$$

定理证完。

下面再来建立 e_{ij}与 f_{ij}或 $\{p_{ij}^{(n)}\}$ 之间的关系式。

定理 10 对任给的状态 i，$j\in S$，则有

(i) $e_{ij}=f_{ij}e_{jj}$， (43)

(ii) $e_{ij}\leqslant f_{ij}$， $e_{ij}\leqslant e_{jj}$， (44)

(iii) $e_{ii}=\lim\limits_{l\to\infty}(f_{ii})^l$， (45)

(iv) $e_{ii}=0$ 等价于 $f_{ii}<1$，$e_{ii}>0$ 等价于 $f_{ii}=1$，或 $e_{ii}=1$ 等价于 $f_{ii}=1$。

证 A_l 仍表示定理 9 中所述的事件，又以 A 表示事件：{有无穷多个正整数 n 使得 $X_n=j$}。显然有 $A_l\supset A_{l+1}$，$l=1$，2，…，并且 $A=\bigcap_{l=1}^{\infty}A_l=\lim\limits_{l\to\infty}A_l$。于是由 e_{ij}的定义式(13)，以及式(40)，并应用概率的连续性定理，便有

$$
\begin{aligned}
e_{ij} &= P(A|X_0=i) = P(\lim_{l\to\infty} A_l|X_0=i) \\
&= \lim_{l\to\infty} P(A_l|X_0=i) = \lim_{l\to\infty} f_{ij}P(A_{l-1}|X_0=j) \\
&= f_{ij}P(\lim_{l\to\infty} A_{l-1}|X_0=j) = f_{ij}P(A|X_0=j) = f_{ij}e_{jj},
\end{aligned}
$$

式(43)得证。既然 f_{ij} 与 e_{jj} 都是概率，$0\leqslant f_{ij}$，$e_{jj}\leqslant 1$，那么由式(43)即得式(44)。

当 $j=i$ 时，由式(42)，类似上面的推导，

$$
e_{ii} = P(\lim_{l\to\infty} A_l|X_0=i) = \lim_{l\to\infty} P(A_l|X_0=i) = \lim_{l\to\infty}(f_{ii})^l,
$$

式(45)得证。

因为 $0\leqslant f_{ii}<1$ 或者 $f_{ii}=1$，二者必居其一，且只居其一，所以 $\lim_{l\to\infty}(f_{ii})^l$ 或者为 0 或者为 1，二者必居其一，只居其一，再由式(45)，(iv)获证，定理证完。

注　其实由 e_{ij} 与 f_{ij} 的概率意义立即可得 $e_{ij}\leqslant f_{ij}$。而式(43)的直观意义也是容易理解的，系统从状态 i 出发，以后无穷多次地达到状态 j 这意味着系统从状态 i 出发后至少有一次达到状态 j，然后又无穷多次地返回到状态 j，但是必须指出如果没有马氏性、齐次性是不能保证式(43)一定成立的。

定理 11　对任给的状态 i，$j\in S$，

(i) 对任意的正整数 m，有

$$
e_{ij} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} e_{kj}; \tag{46}
$$

(ii) 如果 $e_{ij}=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$；

(iii) 如果 $e_{ij}>0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty$。

证　A 表示定理 10 中所述的同一事件，利用概率的完全可加性及 X 的马氏性、齐次性，有

$$
\begin{aligned}
e_{ij} &= P(A|X_0=i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_m=k;A|X_0=i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_m=k;\text{有无穷多个正整数 } n\geqslant m+1,\text{使 } X_n=j|X_0=i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_m=k|X_0=i)P(\text{有无穷多个正整数 } n\geqslant m+1,\text{使 } X_n=j|X_m=k) \\
&= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} P(A|X_0=k) \\
&= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} e_{kj}.
\end{aligned}
$$

式(46)得证。

如果 $e_{ij}=0$，由式(43)，$f_{ij}e_{jj}=0$，若是 $f_{ij}=0$，根据式(22)，对一切正整数 n 都有 $p_{ij}^{(n)}=0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}=0<\infty$。若是 $e_{jj}=0$，由定理 10 之(iv)及定理 4 之推论 2，等价地有 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ 收敛，再由杜伯林公式(24)及 $f_{ij}\leqslant 1$ 便可断定 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ 必收敛，(ii)得证。

如果 $e_{ij}>0$，仍由式(43)知 $e_{jj}>0$，再由定理 10 之 (iv) 及定理 4 之推论 2，等价地有

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ 发散，仍利用杜伯林公式及 $f_{ij}\leqslant 1$ 可断言 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ 必发散，定理证完。

最后指出由式(20)与(21)定义的数字特征 d_i 与 h_i 实际上是相等的。

定理 12 对任意给定的状态 i，如果正整数集 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$，$\{n:\ n\geqslant 1,\ f_{ii}^{(n)}>0\}$ 皆非空，则

$$d_i = h_i。\tag{47}$$

证 因为式(22)，对一切正整数 n，$f_{ii}^{(n)}\leqslant p_{ii}^{(n)}$，所以 $\{n:\ n\geqslant 1,\ f_{ii}^{(n)}>0\}\subset\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$，从而

$$d_i = \text{G.C.D.}\{n: n\geqslant 1, p_{ii}^{(n)}>0\}\leqslant \text{G.C.D.}\{n: n\geqslant 1, f_{ii}^{(n)}>0\} = h_i。\tag{48}$$

如果 $h_i=1$，那么由式(48)，$h_i=d_i=1$，结论已得证。如果 $h_i>1$，由 h_i 的定义，对每个 $l=1,\ \cdots,\ h_i-1$，必有 $f_{ii}^{(1)}=f_{ii}^{(2)}=\cdots=f_{ii}^{(l)}=0$。再由式(23)

$$p_{ii}^{(l)} = f_{ii}^{(1)}p_{ii}^{(l-1)} + f_{ii}^{(2)}p_{ii}^{(l-2)} + \cdots + f_{ii}^{(l-1)}p_{ii} + f_{ii}^{(l)},$$

知 $p_{ii}^{(l)}=0$，$l=1,\ \cdots,\ h_i-1$。

对 $n=h_i+l$，$l=1,\ \cdots,\ h_i-1$，仍由 h_i 的定义，当 $m\neq 0$，$\mathrm{mod}(h_i)$时，$f_{ii}^{(m)}=0$，于是从式(23)得

$$p_{ii}^{(h_i+l)} = f_{ii}^{(h_i)}\cdot p_{ii}^{(l)} = 0。$$

现作归纳假定：对每个 $l=1,\ \cdots,\ h_i-1$，当 $n=l,\ h_i+l,\ \cdots,\ (M-1)h_i+l$ 时，已有 $p_{ii}^{(n)}=0$。再由 h_i 的定义，同样的道理知：

$$p_{ii}^{(Mh_i+l)} = f_{ii}^{(h_i)}p_{ii}^{((M-1)h_i+l)} + \cdots + f_{ii}^{(Mh_i)}p_{ii}^{(l)} = 0。$$

利用归纳法可断言，如果 n 不是 h_i 的整数倍，必有 $p_{ii}^{(n)}=0$，故 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 中的数都可被 h_i 整除，从而 h_i 能整除 d_i，所以 $h_i\leqslant d_i$，综合式(48)得 $d_i=h_i$，定理证完。

4. 状态的基本属性

现在我们可借助于 2 中所给出的数字特征来定义区分不同状态的各种基本性质了。

定义 设 i 为齐次马氏链的一个状态，如果 $f_{ii}=1$，则称 i 为**常返的**（**或返回的、持久的**），如果 $f_{ii}<1$，则称 i 为**非常返的**（**或不返回的、滑过的**）。由 f_{ii}的定义，$f_{ii}=1$ 表明系统从状态 i 出发必定要返回到状态 i 的，再由定理 10 之(iv)知这时有 $e_{ii}=1$，即表示系统从状态 i 出发必定要无穷多次地返回到状态 i。这便是“常返”的含义。如果 $f_{ii}<1$，仍由定理 10 之(iv)知等价地有 $e_{ii}=0$，即表示系统从 i 出发至多返回 i 有穷多次，以后再不返回到 i 了，这就是“滑过”的含义。

如果 $f_{ii}=1$，而且 $\mu_{ii}=\infty$，则称 i 为**消极常返的**（**或零常返的、零状态**）。如果 $f_{ii}=1$，而且 $\mu_{ii}<\infty$，则称 i 是**正常返的**。当 $f_{ii}=1$ 且 $\mu_{ii}=\infty$时，这表示系统从 i 出发必定要返回 i，但是平均返回时间却是无穷大，这就是“消极常返”的含义。同是常返状态，但是其平均返回时间有有穷或无穷之分，即返回速度有快或慢之分，反映在转移概率的极限性质上，其极限有正或零之分(见定理 16、定理 17)，所以有正常返或零常返的不同名称。

称状态 i **有周期** d，如果以下两个条件成立：

(i) 除了有某些正整数 m，使得 $n=md$，$p_{ii}^{(n)}>0$ 之外，对其它的正整数 n，$p_{ii}^{(n)}=0$；

(ii) d 是满足条件(i)的最大整数。

如果状态 i 有周期 d，而且 $d>1$，则称 i 是**周期的**，若 $d=1$ 则称 i 是**非周期的**。

如果状态 i 是常返的、非零的、非周期的，则称此 i 是**遍历的**。

对于齐次马氏链的各个状态，现在我们可以根据它们在常返性、平均回转时间、周期性上的各种不同表现加以区分。但是，如果仅仅依据上述定义来鉴别一个状态是否具有某种特性，往往是困难或麻烦的，因此需要建立一些简便而有效的判别方法。

§2 状态属性的判别及其有关性质

1. 常返性的判定及其有关性质

定理 13 任意给定齐次马氏链 X 的状态 i，当且仅当下列条件之一：

(i) $f_{ii}=g_{ii}=1$； (ii) $P(T_i<\infty|X_0=i)=1$；

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$ 发散； (iv) $e_{ii}>0$ 或 $e_{ii}=1$

成立时，i 是常返的。

当且仅当下列条件之一：

(i′) $f_{ii}=g_{ii}<1$； (ii′) $P(T_i<\infty|X_0=i)<1$；

(iii′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$ 收敛； (iv′) $e_{ii}=0$

成立时，i 是非常返的。

证 由常返和非常返状态的定义；式(12)、式(17)、定理 4 之推论 2，以及定理 10 之(iv)即得本定理。

注 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$ 在判别状态 i 的常返性中起着重要作用，这是因为它具有如下明显的概率意义，由式(14)、条件数学期望

$$
\begin{aligned}
E(N_j|X_0=i) &= \sum_{n=1}^{\infty}E(\delta_{jX_n}|X_0=i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}P(X_n=j|X_0=i)=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}。
\end{aligned} \tag{49}
$$

若 i 是常返的，$P\ (N_i=\infty|X_0=i)\ =e_{ii}=1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=E(N_i|X_0=i)=\infty$。

推论 对任意给定的状态 i，j，则

$$
e_{ij}=\begin{cases} f_{ij}, & \text{若 } j \text{ 是常返的} \\ 0, & \text{若 } j \text{ 是非常返的} \end{cases} \tag{50}
$$

证 由式(43)及定理 13 之(iv)、(iv′)即得式(50)。

定理 14 对任给的状态 i，j，如果 i 是常返的，且 $i\Rightarrow j$，则 j 也是常返的。如果 $i\Leftrightarrow j$，则 i 与 j 同为常返状态或同为非常返状态。

证 若 $i=j$，结论自然成立。现在假定 $i\neq j$，由式(36)与式(38)得

$$F_{ij}(z)P_{jj}(z)=P_{ii}(z)G_{ij}(z),\quad |z|<1。$$

对此式两边在 $z\uparrow 1$ 之下取极限，应用阿贝耳（Abel）定理便有

$$F_{ij}(1)P_{jj}(1)=P_{ii}(1)G_{ij}(1)。\tag{51}$$

由假设条件 $i \Rightarrow j$ 及定理 7、定理 8 知：$0<f_{ij}=F_{ij}(1)\leqslant 1$，$0<g_{ij}=G_{ij}(1)$。又因 i 是常返的，依定理 13 之(iii)知 $P_{ii}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$。将它们代入式(51)中，得 $P_{ij}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}=\infty$，再由定理 13 之(iii)断言 j 是常返的。

如果 $i \Leftrightarrow j$，且 i 是非常返的，那么 j 必是非常返的。倘若不然 j 是常返的，由上面已证的结果知 i 也是常返的，这与假设矛盾。综上所证，i 与 j 同为常返的或同为非常返的。

注 如果状态 j 是非常返的，且 $i \Rightarrow j$，则 i 必是非常返的，否则若 i 是常返的，由定理 14 j 也是常返的，这与假设矛盾。

如果状态 i 是非常返的，且 $i \Rightarrow j$，那么 j 未必是非常返的。考察状态空间 $S=\{i,j\}$，一步转移概率矩阵为

$$\begin{array}{c|cc} & i & j \\ \hline i & 0 & 1 \\ j & 0 & 1 \end{array}$$

的齐次马氏链，因 $p_{ij}=1$，故 $i \Rightarrow j$，对任何正整数 n 都有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=0<\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}p_{jj}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$，由定理 13 知 i 是非常返的而 j 是常返的。

定理 15 任意给定状态 i，j，如果 i 是常返的，且 $i \Rightarrow j$，则

$$e_{ij}=e_{ji}=1, \tag{52}$$

从而

$$f_{ij}=f_{ji}=1。 \tag{53}$$

证 因 i 是常返的，利用式(46)及定理 13 之(i)，便得

$$0=1-e_{ii}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}(1-e_{ki}),\quad m=1,2,\cdots$$

上式右方级数中每项皆非负，故对每个正整数 m 及状态 $k\in S$ 都有 $p_{ik}^{(m)}(1-e_{ki})=0$。又由假设 $i \Rightarrow j$，所以必有某个正整数 m 使 $p_{ij}^{(m)}>0$，于是 $1-e_{ji}=0$，即 $e_{ji}=1$。再由式(44)必有 $f_{ji}=1$。

既然 $f_{ji}>0$，从定理 7 知 $j \Rightarrow i$，因此 $i \Leftrightarrow j$，依定理 14，j 与 i 一样是常返的，完全对称地利用前面已证的事实即得 $e_{ij}=1$，从而 $f_{ij}=1$，定理证完。

推论 常返状态必是本质状态。

证 设 i 是常返状态，若 $i \Rightarrow j$，由式(53)知 $f_{ji}=1>0$，故 $j \Rightarrow i$，因为 j 的任意性，依定义 i 是本质的。

注 如果状态 i 是本质的，即若 $i \Rightarrow j$，则必 $j \Rightarrow i$，那么此 i 是否为常返的呢？回答未必。试考察下例。令齐次马氏链 $\{X_n,\ n=0,\ 1,\ \cdots\}$ 的状态空间 $S=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$，一步转移概率为

$$p_{i0}=\frac{1}{2^{i+1}},\quad p_{i\,i+1}=1-\frac{1}{2^{i+1}},\quad i=0,1,2,\cdots$$

由此知 S 中任何两个状态都是互通的，所以每个状态都是本质的，特别地状态 0 是本质的。但是

$$1-f_{00}=P(X_n\neq 0,n=1,2,\cdots|X_0=0)$$

$$=\lim_{N\to\infty} P(X_n \neq 0, n=1,2,\cdots,N \mid X_0=0)$$

$$=\lim_{N\to\infty} p_{01}p_{12}\cdots p_{N-1\,N}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\prod_{i=0}^{N-1}\left(1-\frac{1}{2^{i+1}}\right)。$$

因为$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}=1<\infty$，所以依无穷乘积收敛的充要条件知上式右方极限收敛于一正数，从而得 $f_{00}<1$，即状态 0 是非常返的，此例说明本质状态 i 一般未必是常返的。但是倘若存在常返状态 j 使得 $i\Rightarrow j$，根据定理 14，这时 i 是常返的，此外当状态空间 S 是有限集时，i 也是常返的。（见 iv. 定理 4）

为了进一步寻求判定常返状态是正常返还是零常返的方法，需要如下重要的结论。

定理 16　对任意给定的状态 i，如果 i 是常返的，且有周期 d_i，则存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)}=\frac{d_i}{\mu_{ii}}。\tag{54}$$

其中 μ_{ii}是 i 的平均回转时间，并规定当 $\mu_{ii}=\infty$时，$\frac{d_i}{\mu_{ii}}$为 0。

证　因为状态 i 暂时固定，不妨简记 $p_{ii}^{(n)}$、$f_{ii}^{(n)}$、d_i、μ_{ii}分别依次为 p_n、f_n、d、μ。令 $r_n=\sum_{v=n+1}^{\infty}f_v$，$n=0,1,\cdots$，由于 i 是常返的及式(23)，则有

$$r_0p_n=p_n=\sum_{v=1}^{n}f_vp_{n-v}=\sum_{v=1}^{n}(r_{v-1}-r_v)p_{n-v},\quad n=0,1,\cdots$$

从而对一切 $n=0,1,\cdots$，$\sum_{v=0}^{n}r_vp_{n-v}=\sum_{v=0}^{n-1}r_vp_{n-1-v}$成立，即 $\sum_{v=0}^{n}r_vp_{n-v}$不依赖 $n\geqslant 0$，注意到 $r_0p_0=1$，于是

$$\sum_{v=0}^{n}r_vp_{n-v}\equiv 1,\qquad n=0,1,\cdots\tag{55}$$

令 $\lambda=\limsup_{n\to\infty}p_{nd}$，由 d 的定义知

$$\lambda=\limsup_{n\to\infty}p_{nd}=\limsup_{n\to\infty}p_n,\tag{56}$$

于是必有子列$\{n_m,m=1,2,\cdots\}$使得当 $m\to\infty$，$n_m\to\infty$，且 $\lambda=\lim_{m\to\infty}p_{n_md}$。

由于 i 是常返的，$f_{ii}=1$，故必有某正整数 t 使 $f_t>0$，又由式(47)d 可整除 t，再利用式(23)得

$$\lambda=\liminf_{m\to\infty}p_{n_md}=\liminf_{m\to\infty}\Big(f_tp_{n_md-t}+\sum_{\substack{v=1\\v\neq t}}^{n_md}f_vp_{n_md-t}\Big)$$

$$\leqslant f_t\liminf_{m\to\infty}p_{n_md-t}+\Big(\sum_{\substack{v=1\\v\neq t}}^{\infty}f_v\Big)\limsup_{m\to\infty}p_m$$

$$=f_t\liminf_{m\to\infty}p_{n_md-t}+(1-f_t)\lambda$$

因此$\liminf_{m\to\infty}p_{n_md-t}\geqslant\lambda$，结合式(56)便知对每个使 $f_t>0$ 的 t 及每个使$\lim_{m\to\infty}p_{n_md}=\lambda$ 的子列 $\{n_m,m\geqslant 1\}$都有$\lim_{m\to\infty}p_{n_md-t}=\lambda$。注意到 t 是 d 的倍数，反复应用此式，则对任何正整数 c 都有$\lim_{m\to\infty}p_{n_md-ct}=\lambda$，从而更一般地对形如 $u=\sum_{z=1}^{l}c_zt_z$ 的正整数 u 仍有

$$\lim_{m\to\infty} p_{n_m d-u} = \lambda \tag{57}$$

其中 l，c_z，$1\leqslant z\leqslant l$ 皆为任意的正整数，而每个 t_z（$1\leqslant z\leqslant l$）是使 $f_{t_z}>0$ 的正整数。因为式(47)，必有满足 $f_{t_z}>0$ 的 t_z，$1\leqslant z\leqslant l$，使 $d=\text{G. C. D.}\{t_z, 1\leqslant z\leqslant l\}$。再由初等数论知识知必存在某正整数 N_0，对每个正整数 $N\geqslant N_0$，有相应的正整数 c_z，$1\leqslant z\leqslant l$，使得 $Nd=\sum\limits_{z=1}^{l}c_z t_z$，由式(57)有

$$\lim_{m\to\infty} p_{(n_m-N)d} = \lambda,\quad N\geqslant N_0。\tag{58}$$

现在式(55)中取 $n=(n_m-N_0)d$，并注意到 d 不能整除 v 时，$p_v=0$，便有

$$\sum_{v=0}^{n_m-N_0} r_{vd}\, p_{(n_m-N_0-v)d} = 1。\tag{59}$$

当 $\sum\limits_{v=0}^{\infty}r_{vd}<\infty$ 时，在式(59)中令 $m\to\infty$，由式(58)及勒贝格（Lebesgue）控制收敛定理得 $\lambda\sum\limits_{v=0}^{\infty}r_{vd}=1$。当 $\sum\limits_{v=0}^{\infty}r_{vd}=\infty$ 时，容易分析推证 $\lambda=0$[1]，于是无论哪种情形都有

$$\lambda = 1\Big/\sum_{v=0}^{\infty}r_{vd}。\tag{60}$$

由式(20)、(21)、(47)，当 d 不能整除 v 时，$f_v=0$，再依 r_n 的定义便知 $r_{vd}=\dfrac{1}{d}\sum\limits_{n=vd}^{vd+d-1}r_n$，于是

$$\sum_{v=0}^{\infty}r_{vd} = \frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty}r_n。\tag{61}$$

利用傅比尼定理还有

$$\sum_{n=0}^{\infty}r_n = \sum_{n=1}^{\infty}nf_n = \mu。\tag{62}$$

将式(62)、(61)代入式(60)中得 $\lambda=d/\mu$。

若令 $\beta=\liminf\limits_{n\to\infty} p_{nd}$，对应地仿照前面的方法可证 $\beta=d/\mu$，综合两者断言 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{nd}$ 存在并为 d/μ，定理证完。

定理 17 设状态 i 是常返的，则

(i) i 为零常返的充要条件是存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0;\tag{63}$$

(ii) i 为遍历的充要条件是存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}} > 0。\tag{64}$$

证 如果 i 为零常返，由式(54)知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)}=0$，但是当 $n\neq 0$，$\text{mod}(d_i)$ 时，$p_{ii}^{(n)}=0$，故存在 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$。反之，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$，而设 i 是正常返的，那么由式(54)极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)}$ 存在且大于零，这与 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$ 矛盾，故 i 必为零常返，(i)得证。

如有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_{ii}}>0$，由(i) i 必为正常返的且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)}=\dfrac{1}{\mu_{ii}}$，与式(54)对比得 $d_i=1$，故 i 是非周期的从而是遍历的。反之，由定理 16 显然成立，(ii)证完。

注 因为常返状态不是零常返便是正常返的，所以定理 17 之(i)也是正常返状态的判

别条件。或由定理 16 知具有周期 d_i 的常返状态 i 为正常返的充要条件是存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_{ii}} > 0。\tag{65}$$

定理 18 对任意给定的常返状态 i，如果状态 $j\Leftrightarrow i$ 则 j 与 i 同为正常返或同为零常返。

证 由 $j\Leftrightarrow i$ 及定理 14 知 j 是常返的，而且存在正整数 m、l 使 $p_{ji}^{(m)}>0$，$p_{ij}^{(l)}>0$。再用 C-K 方程，对任何正整数 n 便有

$$p_{ii}^{(l+n+m)} \geqslant p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(m)},\tag{66}$$

$$p_{jj}^{(m+n+l)} \geqslant p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(l)}。\tag{67}$$

由式(66)、(67)即知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$，于是据定理 17 之(i)，$i$ 与 j 中有一者为零常返另一者必为零常返，一者为正常返另一者必为正常返。

2. 周期性的判定及其有关的性质

定理 19 任意给定的状态 i 具有周期 d 的充分必要条件是 $d=$G. C. D. $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$，从而

$$d = d_i = h_i \tag{68}$$

证 必要性。若状态 i 有周期 d，由定义条件之(i)知 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 非空，而且使 $p_{ii}^{(n)}>0$ 的 n 必须是 d 的正整数倍数，故 G. C. D. $\{n:n\geqslant 1,p_{ii}^{(n)}>0\}$必是 d 的正整数倍数。于是可记 $l\,d=$G. C. D. $\{n:n\geqslant 1,p_{ii}^{(n)}>0\}$。此式表明除了 n 是 $l\,d$ 的正整数 m 倍即 $n=m(l\,d)$ 之外，对其它的 n 都是 $p_{ii}^{(n)}=0$。又根据 i 有周期 d 的定义条件之(ii)，d 是具有上述性质的最大整数，这样 $l=1$，即 $d=$G. C. D. $\{n:n\geqslant 1,p_{ii}^{(n)}>0\}$。

证充分性。假定有 $d=$G. C. D. $\{n:n\geqslant 1,p_{ii}^{(n)}>0\}$，这意味集 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 非空，而且除了 n 是 d 的正整数 m 倍即 $n=md$ 之外，其它的 n 都有 $p_{ii}^{(n)}=0$，即此 d 满足定义条件之(i)。倘若还有正整数 $d'>d$，使得除了 $n=md'$ 的情形外，其它的 n 都有 $p_{ii}^{(n)}=0$，既然 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 非空，那么此 d' 必是 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 的公约数，但是 $d'>d$ 这与 d 是 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 的最大公约数的假定矛盾，这说明如此之 d' 不存在，故 d 满足定义条件之 (ii)，状态 i 有周期 d。

由上所证及式(47)即得式(68)，定理证完。

注 若 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}=\varnothing$，此状态 i 必是非本质的，对此 i 无周期可言。

定理 20 如果存在正整数 m，使齐次马氏链的 m 步转移概率矩阵 $[p_{ij}^{(m)}]$ 中，相应于某状态 j 的那列元素全不为零，则状态 j 有周期，并且是非周期的。

证 由假设对一切 $i\in S$，$p_{ij}^{(m)}>0$。由式 I.(15)知 $0<p_{jj}^{(m)}=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_{m-1}\in S} p_{ji_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{m-1}j}$，因此必有某 $i_1\in S$ 使 $p_{ji_1}>0$，进而由 C-K 方程及假设有 $p_{jj}^{(m+1)}\geqslant p_{ji_1}p_{i_1j}^{(m)}>0$，$i\in S$。特别地，便有 $p_{jj}^{(m+1)}>0$，$p_{jj}^{(m)}>0$，这表明 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{jj}^{(n)}>0\}\neq\varnothing$ 含有元素 m、$m+1$，所以 j 有周期，其周期为 G. C. D. $\{n:n\geqslant 1,p_{jj}^{(n)}>0\}=1$，即 j 是非周期的。

定理 21 设状态 i 有周期 d，则必存在正整数 N_0，使得所有大于或等于 N_0 的正整数 N，都有 $p_{ii}^{(Nd)}>0$。

证 正整数集 $\{n:\ n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0$ 总可写成 $\{n_m,\ m=1,\ 2,\ \cdots\}$，记 $d_m\triangleq$G. C. D. $\{n_1,\cdots,$

$n_m\}$，$m=1, 2, \cdots$，依此定义及定理 19 有 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d \geqslant 1$，显然 d_1 是一有限正整数，故必存在正整数 l 使得 $d_l = d_{l+1} = \cdots = d$，因此 $d = \text{G. C. D.}\{n_1, \cdots, n_l\}$，应用初等数论知识知必存在正整数 N_0，使得对任何不小于 N_0 的正整数 N 都有如下的表达式

$$Nd = N_1 n_1 + \cdots + N_l n_l \tag{69}$$

其中 N_m，$m=1, \cdots, l$ 皆为相应的正整数，由式(69)及 C-K 方程便有

$$p_{ii}^{(Nd)} \geqslant \prod_{m=1}^{l} p_{ii}^{(N_m n_m)} \geqslant \prod_{m=1}^{l} [p_{ii}^{(n_m)}]^{N_m} > 0。$$

定理证完。

定理 22 任意给定两个状态 i、j，$i \Leftrightarrow j$，则 i 有周期 d_i，j 有周期 d_j，而且 $d_i = d_j$。

证 因 $i \Leftrightarrow j$，所以有正整数 l、m 使 $p_{ij}^{(l)} > 0$，$p_{ji}^{(m)} > 0$，从而由 C-K 方程得：$p_{ii}^{(l+m)} \geqslant p_{ij}^{(l)} p_{ji}^{(m)} > 0$，$p_{jj}^{(m+l)} \geqslant p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(l)} > 0$，即 $\{n: n \geqslant 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 与 $\{n: n \geqslant 1, p_{jj}^{(n)} > 0\}$ 皆非空，故 i、j 都有周期，分别依次记为 d_i、d_j。根据定理 19，除了 n 能被 d_i 整除之外，都有 $p_{ii}^{(n)} = 0$，因此 $l+m$ 必能被 d_i 整除。如果 n 不能被 d_i 整除，那么 $l+n+m$ 也不能被 d_i 整除，从而 $p_{ii}^{(l+n+m)} = 0$，由式(66)得 $p_{jj}^{(n)} = 0$，这样 j 的周期 d_j 必能被 d_i 整除。由式(67)完全对称地可得 d_i 必能被 d_j 整除，故 $d_i = d_j$，定理证完。

§3 状态空间的分解

前面§1、§2是对单个状态的性质进行了讨论，那么还应该对所有状态从整体上进行剖析。在本节中首先将按照状态之间的互通关系把整个状态空间分解成若干个状态类之并，考察同一类中状态在转移规律上的共性，然后再去揭示出马氏链的基本概率结构。

1. 状态类与闭集

所谓一个**状态类**是状态空间 S 中满足如下条件的一个最大的子集：其中的任何两个状态（不同的或相同的）互通，即将互通的状态都归属于同一类，而“最大”是指对此状态子集不可能再添加入与此子集中每个状态都互通的其它状态了。显然含有状态 i 的状态类应是 $\{i\} \cup \{j: j \in S, j \Leftrightarrow i\}$ 记为 $S(i)$。特别地，对于不可达到自己的状态 i，尽管 $\{i\}$ 并不符合一个状态类的定义，但因此 i 与任何状态都不互通，这样只好将 $\{i\}$ 规定为一个状态类。结合下面的定理便可指出每个状态属于且只属于一个状态类。

定理 23 两个不全同的状态类必不相交。

证 倘若不然，这两个不全同的状态类有公共元素状态 j，通过 j 以及互通关系的传递性，这两个类中的所有状态都是两两互通的，依状态类是最大的互通状态集的定义，这两个状态集应并为一个类，不可能是两个不全同的状态类，这与假设矛盾，从而定理得证。

由定理 14、定理 18、定理 22 立即可得下面的结论。

定理 24 任何一个状态类中的所有状态或同为非常返的，或同为常返的，或同为正常返的，或同为零常返的，或同为非周期的，或同为周期的，并且都具有相同的周期。

定理 24 表明常返性、周期性等都是类性质。如果一个状态类中的每个状态都是常返的，便称它为**常返类**，依据定理 24 类似地还有**非常返类**、**正常返类**、**零常返类**、**周期类**、**非周期类**等名称。

定理 25　任一状态类中的所有状态或同为非本质的，或同为本质的，分别相应地称为**非本质类**或**本质类**，而且从本质类中任一状态都不能到达别的状态类中的任一状态。

证　由定理 2 及状态类、本质状态的定义即得本定理。

定理 25 指出从本质类中的状态 i 出发必能且只能到达 $S(i)$ 中的每个状态，不可能到达 $S(i)$ 之外的任何状态，但对于非本质类不再具有这种性质。由此引出了闭集及有关的一系列基本概念与结论。

定义　设 C 是状态空间 S 的子集，如果在 C 之外的任一状态都不能自 C 内的任何一个状态达到，即 $i \not\Rightarrow j$ 对一切 $i\in C$，$j\in C^c \triangleq S-C$ 都成立，则称 C 为**闭集**。如果单个状态 i 构成的集 $\{i\}$ 是闭集，则称此 i 是**吸收状态**。任一闭集 $C\subseteq S$，如果 C 中再不含有任何非空闭的真子集，则称此 C 是**不可分的**或**极小的**。依定义状态空间 S 可看作是最大的闭集，如果 S 是不可分的，这时称此马氏链是**不可分的**，否则称为**可分的**。任给状态子集 $D\subseteq S$，包含 D 的一切闭集的交，称为 D 的**闭包**，记为 $\overline{D}$。

现在来给出与上述概念有关的一系列定理。

定理 26　设 $\{C_t,\ t\in T\}$ 是状态空间 S 中的若干个闭集，其中 T 是参数集，则 $\bigcap_{t\in T} C_t$ 仍是闭集。

证　对任何 $i\in \bigcap_{t\in T} C_t$，$j\notin \bigcap_{t\in T} C_t$，那么 $j\in \bigcup_{t\in T} C_t^c$，于是必有 t_0 使 $j\in C_{t_0}^c$，$i\in C_{t_0}$，既然 C_{t_0} 是闭集，故 $i \not\Rightarrow j$，依定义 $\bigcap_{t\in T} C_t$ 是闭集，证完。

由定理 26 便知任一状态集 D 的闭包 $\overline{D}$ 是含 D 的最小闭集。

定理 27　当且仅当对任何 $i\in C$，$j\in C^c$ 都有 $p_{ij}=0$ 时，C 是一闭集。

证　由闭集的定义，必要性显然。现证充分性，因为假设条件及 C - K 方程有

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k\in C} p_{ik}p_{kj} + \sum_{k\notin C} p_{ik}p_{kj} = 0,\quad i\in C,\quad j\in C^c,$$

现在假定已有 $p_{ij}=p_{ij}^{(2)}=\cdots=p_{ij}^{(m)}=0$，$i\in C$，$j\in C^c$，则

$$p_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k\in C} p_{ik}^{(m)}p_{kj} + \sum_{k\notin C} p_{ik}^{(m)}p_{kj} = 0,$$

再由归纳法即得：对任何正整数 n，$p_{ij}^{(n)}=0$，$i\in C$，$j\in C^c$，依定义 C 为闭集，定理证完。

定理 28　i 为吸收状态的充分必要条件是 $p_{ii}=1$，即从 i 出发以概率 1 永远停留在状态 i 上。

证　i 为吸收状态即 $\{i\}$ 是闭集，再由概率的完全可加性，$1 = p_{ii} + \sum_{k\neq i} p_{ik}$，以及定理 27 便得本定理。

定理 29　任给状态 i，则 $\{i\}$ 的闭包为

$$\overline{\{i\}} = \{i\} \cup \{j: j\in S,\quad i\Rightarrow j\}。\tag{70}$$

证　记 $D=\{i\}\cup\{j: j\in S, i\Rightarrow j\}$，先证 D 为闭集，倘若不然，依闭集之定义必有状态 $j\in D$、$k\in D^c$ 使得 $j\Rightarrow k$，依 D 的定义知 $j\neq i$ 且 $i\Rightarrow j$，再由可达关系的传递性得 $i\Rightarrow k$，但这与 $k\in D^c$ 矛盾，所以 D 必为闭集。

再证 D 是含 i 的最小闭集。设 G 是含 i 的任一闭集，往证 $G\supset D$，倘若不然有 $k\in D$、$k\neq i$，但 $k\notin G$，那么由 G 是闭集知 $i \not\Rightarrow k$，这与 $k\in D$ 及 D 的定义相矛盾，这表明只能 $k\in G$，结论得证。

定理 30　设 C 是一闭集，当且仅当 C 中的任何两个状态（相同或不同）都互通时，C 是

不可分的（极小的）。

证 先证充分性。设 D 为任一非空闭集且 $D\subseteq C$，令 $i\in D\subseteq C$，因为闭包 $\{\bar{i}\}$ 是含 i 的最小闭集，所以 $\{\bar{i}\}\subseteq D$，由定理 29 及 C 中任何两个状态都互通的假设知 $\{\bar{i}\}\supseteq C$，综上所证得

$$D=C=\{\bar{i}\},\tag{71}$$

故 C 不含任何非空闭真子集，即 C 不可分。

再证必要性。设 C 是不可分闭集，如果有 i，$j\in C$，$i\neq j$，且 $i\not\Rightarrow j$，那么由定理 29 知 $j\notin\{\bar{i}\}$，并 $\{i\}\subset\{\bar{i}\}\cap C\subset C$，又因定理 26 得 $\{\bar{i}\}\cap C$ 是含 i 不含 j 的 C 的非空闭真子集，这与 C 不可分的假设矛盾，由此断言必有 $i\Rightarrow j$，对称地也有 $j\Rightarrow i$，即 $i\Leftrightarrow j$，定理证完。

推论 齐次马氏链不可分的充分必要条件是其状态空间中的任何两个状态（相同或不同）都是互通的。

定理 31 如果在齐次马氏链的 n（$n=1, 2, \cdots$）步转移概率矩阵 $P^{(n)}=[p_{ij}^{(n)}]$ 中，将某闭集 C（$\subset S$）以外的状态所对应的一切行和列全部删去，所剩的行和列保持相对位置不变而构成的方阵 $P_C^{(n)}=[p_{ij}^{(n)}]_{C\times C}$ 仍是一随机矩阵，是 $P^{(n)}$ 的子随机矩阵。

证 对任何 i，$j\in C\subset S$，$p_{ij}^{(n)}\geqslant 0$，由闭集 C 之定义，对任何 $i\in C$，$j\notin C$ 有 $p_{ij}^{(n)}=0$，故从概率的可加性得

$$1=\sum_{j\in S}p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in C}p_{ij}^{(n)}+\sum_{j\notin C}p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in C}p_{ij}^{(n)}。\tag{72}$$

依随机矩阵的定义，结论得证。

注 根据定理 31 $P_C^{(1)}$ 是随机矩阵，于是若再附加上一个定义在 C 上的初始分布，由 Ⅰ．定理 3 便可确定一个状态空间为 C 的转移概率矩阵为 $P_C^{(1)}$ 的齐次马氏链，可将它看作是原马氏链的子马氏链。

值得注意的是状态类与闭集这两个概念是有差异的，它们之间并没有从属关系，即状态类未必是闭集，闭集也未必是状态类。

例 1 设齐次马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{Bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{Bmatrix}\tag{73}$$

易验证由每一个状态 i 构成的 $\{i\}$ 都是非本质状态类但不是闭集。又每个状态集 $\{i, i+1, \cdots\}$ 都是闭集，而且还是可分的，所以此例也说明一个闭集可以不包含不可分闭子集。

例 2 设齐次马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{array}{c} \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \end{array} \tag{74}$$

易验证由状态 i_1、i_2、i_3、i_4 构成的 $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ 是一闭集但不是状态类。

尽管如此，状态类与闭集却有着密切的联系。设 C 是一闭集，又状态 $i\in C$，那么由闭集的定义知含有 i 的状态类 $S(i)=\{i\}\cup\{j:j\in S, j\Leftrightarrow i\}\subseteq C$，由此可断言闭集一定是若干个状态类的并集。

定理 32　一状态集合 C 是不可分闭集的充分必要条件是 C 为一个本质类。

证　充分性。设 C 为本质类，对任何 $i\in C$，$j\notin C$，倘若有 $i\Rightarrow j$，由 i 是本质的知 $j\Rightarrow i$，于是 $i\Leftrightarrow j$，既然状态类 C 是最大的都互通的状态集，那么 $j\in C$，但这与 $j\notin C$ 矛盾，故 $i\not\Rightarrow j$，这表明 C 为闭集，再由定理 30 知 C 是不可分的。

再证必要性。设 C 是不可分闭集，由式(71)与(70)，对任何 $i\in C$ 有

$$C=\{\bar{i}\}=\{i\}\cup\{j:j\in S, i\Rightarrow j\},$$

此式表明从 C 中任一状态 i 出发可到达 C 中的任一状态，而且只能到达 C 中的状态，故 C 是一个最大的都互通的状态集，从而 C 是一个本质类。

定理 33　有限多个非本质类之并一定不是闭集。

证　应用反证法。设 C_1，…，C_n 是 n 个非本质类，倘若并 $C=\bigcup\limits_{m=1}^{n}C_m$ 是闭集，那么对任一 $i_1\in C_{m_1}$，$m_1\in\{1,\cdots,n\}$，必有 $i_2\in C_{m_2}\subset C$，$m_2\in\{1,\cdots,n\}$，使得 $i_1\Rightarrow i_2$，但 $i_2\not\Rightarrow i_1$。又因同一状态类中的状态都是互通的，所以 $m_2\neq m_1$，而且 C_{m_1} 中的任一状态可到达 C_{m_2} 中的任一状态，表为 $C_{m_1}\Rightarrow C_{m_2}$，但 C_{m_2} 中的任一状态不可到达 C_{m_1} 中的任一状态，表为 $C_{m_2}\not\Rightarrow C_{m_1}$，反复照此法做下去，对任意给定的正整数 $l>n$，应有：$C_{m_1}\Rightarrow C_{m_2}\Rightarrow\cdots\Rightarrow C_{m_l}$，$C_{m_l}\not\Rightarrow C_{m_{l-1}}$，…，$C_{m_l}\not\Rightarrow C_{m_1}$，$m_1$，$m_2$，…，$m_l$ 两两互不相同，但 $m_1,m_2,\cdots,m_l\in\{1,\cdots,n\}$ 显然矛盾，故 C 不是闭集，证完。

注　例 1 说明无限多个非本质类的并集却可以是闭集。

定理 32 与定理 33 是用本质类或非本质类来表征闭集的结构。进而再来讨论状态空间 S 的结构。

2. 状态空间的分解

由定理 32 及定理 24 直接可得下面的结论。

定理 34　任何一个不可分闭集或本质类中的所有状态或同为非常返的，或同为常返的，或同为正常返的，或同为零常返的，或同为非周期的，或同为周期的，而且这时都具有相同的周期。

定理 35　(i) 对任意给定的常返状态 i，必存在唯一的不可分闭集（或本质类）$C(i)$

使得 $i\in C(i)$，而且对任何 j，$k\in C(i)$ 有 $f_{jk}=f_{kj}=1$；

(ii) 对任给的两个常返状态 i，j，$C(i)$ 与 $C(j)$ 是如(i)中所确定的两个不可分闭集，则或 $C(i)\cap C(j)=\varnothing$，或 $C(i)=C(j)$，二者必居其一，且只居其一。

证 取 $C(i)=\overline{\{i\}}$，$\overline{\{i\}}$ 是含 i 的最小闭集，由定理 14、定理 15 知 $\overline{\{i\}}$ 全由常返状态构成，且对任何 $j,k\in\overline{\{i\}}$，$f_{jk}=f_{kj}=1$，故 $j\Leftrightarrow k$，依定理 30 便知 $\overline{\{i\}}$ 是不可分的。再用定理 32 与定理 23 可得此 $C(i)$ 是唯一的。(i)得证。应用定理 32 与定理 23 即得(ii)。

定理 36（分解定理） 任一齐次马氏链的状态空间 S 可唯一地分解成有限多个或可列无限多个互不相交的状态子集 $D,C_1,C_2,\cdots$ 之并，即

$$S=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots,\tag{75}$$

其中 (i) D 是所有非常返状态组成的状态子集；

(ii) 每个 C_n $(n=1,2,\cdots)$ 是由常返状态组成的不可分闭集，从而 C_n 中的一切状态，或同为正常返，或同为零常返，并有相同的周期，又对任何 $i,j\in C_n$，总有 $f_{ij}=1$。

证 每个状态不是常返的便是非常返的，记 D 是全体非常返状态集，那么 $S=D\cup D^c$，D^c 是全体常返状态集，根据定理 35D^c 可唯一地分解为互不相交的不可分的闭常返状态集 C_1，C_2，…之并，再由定理 34 即得本定理。

定理 37 设 C 为不可分闭集或本质类，周期为 d，对任何状态 i，$j\in C$，如果 $p_{ij}^{(n_1)}>0$，$p_{ij}^{(n_2)}>0$，则 n_2-n_1 必能被 d 整除。

证 由假设条件知 i 是本质状态，而且 $i\Rightarrow j$，故 $j\Rightarrow i$，于是有正整数 n 使得 $p_{ji}^{(n)}>0$，再用 C-K 方程得

$$p_{ii}^{(n_1+n)}\geqslant p_{ij}^{(n_1)}p_{ji}^{(n)}>0,\quad p_{ii}^{(n_2+n)}\geqslant p_{ij}^{(n_2)}p_{ji}^{(n)}>0,$$

据定理 19，n_1+n 与 n_2+n 均能被 d 整除，故 n_2-n_1 必能被 d 整除，证完。

定理 37 说明在一个周期的不可分闭集或本质类中，从一个状态转移到另一个状态必定是周期的发生，于是周期为 d 的不可分闭集可按下面定理所述的方法分割为 d 个互不相交的状态子集之并。

定理 38 设 C 是周期为 d 的不可分闭集或本质类，则 C 可唯一地分解为 d 个互不相交的状态子集 G_0，G_1，…，G_{d-1} 之并，即

$$C=\bigcup_{m=0}^{d-1}G_m;\quad G_m\cap G_l=\varnothing,\ m\neq l。\tag{76}$$

而且对任何 $k\in G_m$，$m=0,1,\cdots,d-1$，有

$$\sum_{j\in G_{m+1}}p_{kj}=1,\tag{77}$$

其中 G_d 理解为 G_0。

证 任意取定一状态 $i\in C$，对每个 $m=0,1,\cdots,d-1$，定义

$$G_m=\{j:\ 对某个\ n\geqslant 0,\ p_{ij}^{(nd+m)}>0\},\tag{78}$$

因为 C 是不可分闭集，故 $C=\bigcup\limits_{m=0}^{d-1}G_m$。现在来证当 $m\neq l$ 时，$G_m\cap G_l=\varnothing$，倘若有 $j\in G_m\cap G_l$，由式(78)，必存在 n_1、n_2 使 $p_{ij}^{(n_1d+m)}>0$、$p_{ij}^{(n_2d+l)}>0$，又依定理 30 知 $i\Leftrightarrow j$，故必存在 N 使 $p_{ji}^{(N)}>0$，于是从 C-K 方程得：

$$p_{ii}^{(n_1d+m+N)}\geqslant p_{ij}^{(n_1d+m)}p_{ji}^{(N)}>0;\quad p_{ii}^{(n_2d+l+N)}\geqslant p_{ij}^{(n_2d+l)}p_{ji}^{(N)}>0。$$

根据定理 19，$m+N$ 与 $l+N$ 必都能被 d 整除，故其差 $m-l$ 也能被 d 整除，但是 $0\leqslant m$，l

$\leqslant d-1$，因此只能 $m-l=0$，即 $m=l$，这与 $m\neq l$ 的假定矛盾，这样 $G_m\cap G_l=\varnothing$，式(76)得证。

对任给的 $k\in G_m\subset C$ $(m=0,1,\cdots,d-1)$，因为 C 是闭集以及定理 27 有

$$1=\sum_{j\in C}p_{kj}=\sum_{j\in G_{m+1}}p_{kj}+\sum_{j\in C-G_{m+1}}p_{kj},\tag{79}$$

由 G_m 与 G_{m+1} 的定义式(78)，必有 n 使 $p_{ik}^{(nd+m)}>0$，而对 $j\in C-G_{m+1}$ 有

$$0=p_{ij}^{(nd+m+1)}\geqslant p_{ik}^{(nd+m)}p_{kj}\geqslant 0,$$

从而只有 $p_{kj}=0$，将此代入式(79)中即得式(77)。

最后证明分解式(76)的唯一性，即要证 $\{G_0,G_1,\cdots,G_{d-1}\}$ 与最初 i 的选择无关。假设对状态 i，C 分解为 $\bigcup_{m=0}^{d-1}G_m$，而对另一个状态 i'，C 分解为 $\bigcup_{m'=0}^{d-1}G'_{m'}$。只要证：任何两个状态 $j,k\in G_m$，则也有 $j,k\in G'_{m'}$ 即可，其中 m 与 m' 不必相同。不妨设 $i'\in G_l$，那么，当 $m\geqslant l$ 时，从 i' 出发，能也只能在第 $m-l$，$m-l+d$，$m-l+2d$，…等步上到达 j 或 k，故依定义 $j,k\in G'_{m-l}$。当 $m<l$ 时，从 i' 出发，能也只能在第 $d-(l-m)=m-l+d$，$m-l+2d$，…等步上到达 j 或 k，故 j 与 k 也同属于一个 G'_{m-l+d} 中，定理证完。

由定理 38 立即导致下面的定理。

定理 39　设 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是周期为 d 的不可分的齐次马氏链，其状态空间 S 已唯一地分解成 d 个互不相交的状态子集 $G_0,G_1,\cdots,G_{d-1}$ 之并，如定理 38 所示。今仅在时刻 0，d，$2d$，…上考虑 X，即令 $\{Y_n=X_{nd},n=0,1,\cdots\}$，则

(i) $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 是以 $P^{(d)}=[p_{ij}^{(d)}]$ 为转移概率矩阵的新的齐次马氏链；

(ii) 对 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 而言，每个 G_m $(m=0,1,\cdots,d-1)$ 都是不可分闭集，而且 G_m 中的状态都是非周期的；

(iii) 如果 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的所有状态皆为常返的，则 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 的所有状态也都是常返的。

证　对任何非负整数 n，由 X 的马氏性及齐次性及任何 $i_0,\cdots,i_{n-1},i,j\in S$ 有

$$\begin{aligned}P(Y_{n+1}&=j|Y_0=i_0,\cdots,Y_{n-1}=i_{n-1},Y_n=i)\\&=P(X_{(n+1)d}=j|X_0=i_0,\cdots,X_{(n-1)d}=i_{n-1},X_{nd}=i)\\&=P(X_{(n+1)d}=j|X_{nd}=i)=P(Y_{n+1}=j|Y_n=i),\end{aligned}$$

$$P(Y_{n+1}=j|Y_n=i)=P(X_{(n+1)d}=j|X_{nd}=i)=P(X_d=j|X_0=i)=p_{ij}^{(d)}。$$

由此断言 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 是齐次马氏链，转移矩阵为 $P^{(d)}$。

根据定理 38 便知每个 G_m $(m=0,\cdots,d-1)$ 对 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 而言都是闭集。又对任何 $j,k\in G_m$，因 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 不可分，以及定理 30 知必存在 N，使 $p_{jk}^{(N)}>0$，又因定理 38，此 N 只能为形如 nd 的正整数，于是对 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 而言 $j\Rightarrow k$，对称地可证 $k\Rightarrow j$，故有 $j\Leftrightarrow k$，应用定理 30 得 G_m 不可分。再由定理 21 知必存在某正整数 N，使得一切 $n\geqslant N$ 都有 $p_{jj}^{(nd)}>0$，从定理 19 可见对 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 而言状态 j 的周期是 1，或是非周期的，(ii)得证。

最后证 (iii)，设 X 的状态全为常返的，任取状态 $j\in G_m$，由周期的定义知：当 $n\neq 0$ mod (d) 时，$p_{jj}^{(n)}=0$，因而 $f_{jj}^{(n)}=0$，故

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}f_{jj}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{jj}^{(nd)}。$$

即 j 对 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 而言也都是常返的。证完。

在本章中，对齐次马氏链的状态进行分类，对状态空间进行分解所建立的概念与方法，不仅本身具有明显的概率意义，而且能够帮助我们探讨和理解有关$p_{ij}^{(n)}$极限性质的一系列定理的意义，便于发现诸如定理 31 之注与定理 39 所揭示的马氏链的概率结构，认识并理清以马氏链为其数学模型的随机系统的运动一般性质。

3. 马尔科夫随机系统的运动规律

设随机系统$\sum$的数学模型是齐次马氏链$X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$，其状态空间$S$和周期为$d$的不可分闭集$C$分别已按定理 36 和定理 38 作了唯一分解：$S=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots$，$C=G_0\cup G_1\cup\cdots\cup G_{d-1}$。下面的几个定理给出了$\sum$作随机运动时所遵循的一般规律。

首先由闭集的定义及定理 38 中的式(77)即得：

定理 40 (i) $\sum$自闭集C中任何一个状态出发，将以概率 1 永远留在C中；(ii) 若C是周期为d的不可分闭集，$\sum$从G_m ($m=0, \cdots, d-1$) 中任何一个状态出发，下一步必将以概率 1 进入G_{m+1}，经d步转移必将以概率 1 回到G_m中。

定理 41 $\sum$自常返本质类(即常返不可分闭集)C_s中的任何一个状态出发必将以概率 1 永远留在C_s中，而且无限多次地达到该类C_s中的任何一个状态。

证 由定理 40 之(i)，定理 15 以及式(13)便得本定理。

一般说来，全体非常返状态集D可以是闭集也可以不是闭集，那么$\sum$在D中是如何运动的？又服从什么样的法则？这便是下面将要进行讨论并作出回答的问题。

定理 42 (i) 从非常返类中的任何一个状态出发只可能有限多次达到该类中的任何一个状态。因此从只含有限多个状态的非常返类中的任一状态出发，以概率 1 迟早要离开该非常返类。

(ii) 非常返的本质类必含有无限多个状态。

(iii) 如果全体非常返状态构成的集D是有限集，则D一定不是闭集。

证 由非常返状态类的定义，对此类中的任何两个状态i、j，$i\Leftrightarrow j$，$f_{ii}<1$，$f_{jj}<1$，依照定理 10，等价地有$e_{ii}=e_{jj}=0$，再用式(43)得$e_{ij}=e_{ji}=0$、注意到式(13)的概率意义，即得结论(i)。

根据定理 32，本质类是闭集，因此从本质类中任何一个状态出发以概率 1 不可能离开该本质类，再由前面已证的论断(i)便得(ii)。

倘若不然假定D是闭集，那么对任取的$i\in D$，一切$j\notin D$及任何正整数n都有$p_{ij}^{(n)}=0$，于是得

$$1=\sum_{j\in D}p_{ij}^{(n)}+\sum_{j\notin D}p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in D}p_{ij}^{(n)},\quad n=1,2,\cdots。$$

因为D是有限集，在上式两边令$n\to\infty$取极限，同时利用即将在Ⅱ．定理 1 中给出的事实：$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$，$j\in D$，便有

$$1=\sum_{j\in D}\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$$

导致矛盾。这就表明D不可能是闭集，证完。

定理 40、定理 41、定理 42 仅仅描画出系统$\sum$在非常返类、常返类、周期类这些状态

类之间作随机运动时在统计规律上的大致轮廓，下一章还将进一步探讨$\sum$运动的概率稳定性，$\sum$从一个状态类首次转入到另一状态类等更精细更深入的定量概率特性。

第三章 转移概率的稳定性能

为了辨明一个以离散参数齐次马氏链 $X=\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 为其数学模型的随机系统 Σ 是否具有统计意义下的稳定性，我们可以在它的状态空间 S 中，考察 Σ 从一个状态转移到另一个状态的概率随着转移步数的不断增大是否稳定在一个确定值附近，而且此值是否与 Σ 初始所处的状态无关，也就是要探讨下面一系列重要的数学问题：

(i) 对任意给定的状态 i，$j\in S$，当 $n\to\infty$ 时，转移概率数列 $\{p_{ij}^{(n)}\}$ 是否收敛；

(ii) 对任意给定的状态 i，$j\in S$，如果存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$，此极限值是否与初始状态 i 无关；

(iii) 在怎样的条件下才能确保存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$，而且它与 i 无关。

有关当 $n\to\infty$ 时转移概率数列 $\{p_{ij}^{(n)}\}$ 的极限性质的这一类定理统称为遍历定理。如果对一切 i，$j\in S$ 都存在不依赖于 i 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j$，且 $\sum\limits_{j\in S}\pi_j=1$，则称此马氏链 X 具有遍历性。这些正是本章要讨论的主题之一。

§1 转移概率的极限性质

定理 1 如果状态 $j(\in S)$ 是非常返的，则对任何状态 $i\in S$，都有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0。\tag{1}$$

证 当 $i=j$ 时，由Ⅰ．定理 13 之(iii′)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)}=0$。当 $i\neq j$ 时，应用Ⅰ．定理 6 中的式(36)、阿贝尔定理及Ⅰ．定理 13 之(iii′)得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1) = F_{ij}(1)P_{jj}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$，定理证完。

定理 2 如果状态 j 是零常返的，则对任何状态 $i\in S$，都有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0。\tag{2}$$

证 任取正整数 N、n 使得 $1\leqslant N\leqslant n$，由式Ⅱ．(23)有

$$p_{ij}^{(n)} \leqslant \sum_{m=1}^{N} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} + \sum_{m=N+1}^{n} f_{ij}^{(m)},$$

对上式，暂时固定 N，先令 $n\to\infty$ 两边皆取极限，注意到 j 是零常返的以及Ⅱ．定理 17 之(i)便得

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} f_{ij}^{(m)},$$

对此式两边再令 $N\to\infty$ 取极限，因为 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)}=f_{ij}\leqslant 1$，就有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} = 0 \quad ,$$

定理得证。

当状态 j 是常返状态且有周期 d_j 时，如果 i 与 j 分别属于不同的闭集，那么由闭集的定义必有 $p_{ij}^{(n)}=0$，$n=1$，2，…，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$。又对非负整数 n 及正整数 m：$1\leqslant m\leqslant d_j-1$ 必有 $p_{jj}^{(nd_j+m)}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd_j+m)}=0$。一般来说极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 未必存在，即使存在极限，此极限值也可能有赖于 i，因此不宜仅局限在讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 的存在性问题上。回顾Ⅰ．定理16，受式 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd_j)}=\dfrac{d_j}{\mu_{ij}}$ 的启发，我们转向讨论 $p_{ij}^{(nd_j+m)}$ 在 $n\to\infty$ 时的极限问题，其中 $m=0$，1，…，d_j-1。

为此，需要引进下面有用的概念，记

$$f_{ij}(m) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}^{(ld_j+m)}, \qquad i,j\in S, \quad m=0,1,\cdots,d_j-1, \tag{3}$$

$f_{ij}(m)$ 表示系统 $\sum$ 从状态 i 出发，在某时刻 $n\equiv m$，(mod d_j) 首先达到状态 j 的概率，因为每项 $f_{ij}^{(n)}(n=0,1,\cdots)$ 都是非负的，所以有

$$\sum_{m=1}^{d_j} f_{ij}(m) = \sum_{m=1}^{d_j}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}^{(ld_j+m)}\Big) = \sum_{l=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{d_j} f_{ij}^{(ld_j+m)}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}。 \tag{4}$$

定理 3　设状态 j 是正常返的，有周期 d_j，则对任意的状态 $i\in S$ 以及任意的 $m=1$，2，…，d_j，必有极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd_j+m)} = f_{ij}(m)\,\frac{d_j}{\mu_{jj}}, \tag{5}$$

其中 μ_{jj} 是 j 的平均回转时间。

证　由Ⅰ．定理19，对正整数 $n\not\equiv 0$ (mod d_j)，$p_{jj}^{(n)}=0$，那么应用式Ⅰ．(23)得

$$p_{ij}^{(nd_j+m)} = \sum_{v=0}^{nd_j+m} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(nd_j+m-v)} = \sum_{l=0}^{n} f_{ij}^{(ld_j+m)} p_{jj}^{((n-l)d_j)} \quad ,$$

于是对任何正整数 N、n，$N\leqslant n$ 有

$$\sum_{l=0}^{N} f_{ij}^{(ld_j+m)} p_{jj}^{((n-l)d_j)} \leqslant p_{ij}^{(nd_j+m)} \leqslant \sum_{l=0}^{N} f_{ij}^{(ld_j+m)} p_{jj}^{((n-l)d_j)} + \sum_{l=N+1}^{\infty} f_{ij}^{((ld_j+m)} \quad ,$$

现在上式中先固定 N，令 $n\to\infty$，由Ⅰ．定理16得

$$\sum_{l=0}^{N} f_{ij}^{(ld_j+m)}\,\frac{d_j}{\mu_{ij}} \leqslant \liminf_{n\to\infty}\; p_{ij}^{(nd_j+m)} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\; p_{ij}^{(nd_j+m)}$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}^{(ld_j+m)}\,\frac{d}{\mu_{jj}} + \sum_{l=N+1}^{\infty} f_{ij}^{(ld_j+m)} \quad ,$$

对此式令 $N\to\infty$ 取极限，注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}\leqslant 1$，便有

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}^{(ld_j+m)}\,\frac{d_j}{\mu_{jj}} \leqslant \liminf_{n\to\infty}\; p_{ij}^{(nd_j+m)} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\; p_{ij}^{(nd_j+m)} \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}^{(ld_j+m)}\,\frac{d_j}{\mu_{jj}} \quad ,$$

由此式及$f_{ij}(m)$的定义得知：极限$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+m)}$存在，并且就等于$f_{ij}(m)\dfrac{d_j}{\mu_{jj}}$，证完。

推论 1 设X是不可分的齐次马氏链，它的每个状态皆为正常返的，而且都有周期d，依Ⅱ.定理36、Ⅱ.定理38，状态空间S唯一地分解成$S=\bigcup\limits_{m=0}^{d-1}G_m$，则对任意的状态$i$，$j\in S$必存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = \begin{cases} d/\mu_{jj}, & \text{如果 } i \text{ 与 } j \text{ 同属于一个 } G_m, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \tag{6}$$

特别地，如果$d=1$，则对任何i，$j\in S$必存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1/\mu_{jj}。 \tag{7}$$

证 在定理 3 中取$m=d$，便知存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = f_{ij}(d)\,\frac{d}{\mu_{jj}}。 \tag{8}$$

依式(3)，$f_{ij}(d)=\sum\limits_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(ld)}$。如果$i$与$j$不属于同一个$G_m$，那么由Ⅱ.定理40之(ii)知$p_{ij}^{(ld)}=0$，$l=1$，2，…，既然$0\leqslant f_{ij}^{(ld)}\leqslant p_{ij}^{(ld)}$，故$f_{ij}^{(ld)}=0$，$l=1$，2，…，于是$f_{ij}(d)=0$。如果$i$与$j$属于同一个$G_m$，仍由Ⅱ.定理40之(ii)，对于正整数$n\not\equiv 0 \pmod d$，有$p_{ij}^{(n)}=0$，从而$f_{ij}^{(n)}=0$，于是

$$f_{ij}(d) = \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(ld)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}。$$

再利用Ⅱ.定理 30 及Ⅱ.定理15知$f_{ij}=1$，所以$f_{ij}(d)=1$。将此式代入式(8)即得式(6)，由式(6)直接得到式(7)，推论证完。

由推论 1 及遍历性的定义立即可以得到

推论 2 齐次马氏链具有遍历性的必要条件是所有常返状态都是非周期的，并且至多有一个常返状态的不可分闭子集。

定理 4 对状态空间为S的齐次马氏链X，如果存在某正整数m使X的一步转移概率矩阵P的m次幂$P^m=[p_{ij}^{(m)}]$中的每个元素皆大于零，则X是不可分的，而且对任意的i，$j\in S$，必存在极限$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$，又此极限值与初始状态$i$无关，记作$\pi_j$，即有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \begin{cases} 0, & j \text{ 为非常返的或零状态}, \\ 1/\mu_{jj}, & j \text{ 为正常返的非周期的}。 \end{cases} \tag{9}$$

证 因为假设条件，对任何状态i，$j\in S$，$p_{ij}^{(m)}>0$，所以$i\Leftrightarrow j$，故状态空间S构成不可分闭集，即X是不可分马氏链。进一步再由$p_{ij}\geqslant 0$，i，$j\in S$，$\sum\limits_{j\in S} p_{ij}=1$，$i\in S$，便知$P^{1+m}=PP^m=[p_{ij}^{(1+m)}]$中的每个元素$p_{ij}^{(1+m)}>0$，$i$，$j\in S$，于是对每个状态$i\in S$都有G.C.D.$\{n\geqslant 1: p_{ii}^{(n)}>0\}=1$，依Ⅱ.定理19与Ⅱ.定理 34 知每个状态都是非周期的。仍依Ⅱ.定理 34 以及本章的定理1、定理2、定理3之推论便得：如果S中有一个状态是非常返的（或是零状态），则S中的每个状态都是非常返的（或都是零状态），而且对一切i，$j\in S$，存在$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$。如果$S$中有一个状态是正常返的，则$S$中的一切状态都是正常返的，而且对所有$i$，$j\in S$，必存在$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=1/\mu_{jj}>0$，定理证完。

定理 5 设$X=\{X_n, n=0,1,\cdots\}$是不可分的齐次马氏链，状态空间S中每个状态都是遍历的，即正常返非周期的，由定理 4 知对任何状态i，$j\in S$，必存在极限$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$，并且它

与 i 无关，记为 $\pi_j \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$，则对任给的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}-\pi_j\right|\geqslant\varepsilon\right)=0,\qquad j\in S\ ,\tag{10}$$

其中 $\delta_{jX_m}=\begin{cases}1, & \text{当 } X_m=j,\\ 0, & \text{当 } X_m\neq j。\end{cases}$

在式(10)中，$\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}$ 即为状态 j 在 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 中出现的频率，本定理指出了此频率依概率收敛于经过许多步转移之后系统处于状态 j 的概率 π_j，这就是不可分遍历马氏链的大数定理。

证

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}-\pi_j\right|\geqslant\varepsilon\right)=\sum_{i\in S}P(X_0=i)P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}-\pi_j\right|\geqslant\varepsilon\,|\,X_0=i\right)。$$

为证式(10)，应用控制收敛定理与上式，只要证明下式即可：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}-\pi_j\right|\geqslant\varepsilon\,|\,X_0=i\right)=0,\qquad i,j\in S。\tag{11}$$

由切贝雪夫（Чебышев）不等式，

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}-\pi_j\right|\geqslant\varepsilon\,|\,X_0=i\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}-\pi_j\right|^2|\,X_0=i\right],$$

为证式(11)只要证下式即可：

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}-\pi_j\right|^2|\,X_0=i\right]=0,\quad i,j\in S。\tag{12}$$

而

$$E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}-\pi_j\right|^2|\,X_0=i\right]=\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\delta_{jX_m}\delta_{jX_l}\,|\,X_0=i\right]-\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}\pi_j+\pi_j^2。$$

应用即将在§2. 定理 6 中所给出的结论：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=\pi_j$，$i$，$j\in S$，以及上式，为证式(12)，只要证明下式即可：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\delta_{jX_m}\delta_{jX_l}\,|\,X_0=i\right]=\pi_j^2,\qquad i,j\in S,\tag{13}$$

注意到

$$E\left[\delta_{jX_m}\delta_{jX_l}\,|\,X_0=i\right]=\begin{cases}P(X_l=j,X_m=j\,|\,X_0=i)=p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}, & l<m,\\ P(X_m=j\,|\,X_0=i)=p_{ij}^{(m)}, & l=m,\end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\delta_{jX_m}\delta_{jX_l}\,|\,X_0=i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}+\frac{2}{n^2}\sum_{1\leqslant l<m\leqslant n}p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}$$

仍用§2. 定理 6 的结论得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=0,\quad i,j\in S。$$

那么最后只要证明下式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant l<m\leqslant n}p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}=\frac{\pi_j^2}{2},\quad i,j\in S。\tag{14}$$

由假设条件及定理 3 之推论知：$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}p_{jj}^{(n)}=\pi_j$，$i$，$j\in S$。因此对任给的$0<\varepsilon<\pi_j$（$j$ 暂

时给定)，必存在 N，使得 $n\geqslant N$ 时，有 $|p_{ij}^{(l)}-\pi_j|<\varepsilon$，$|p_{jj}^{(l)}-\pi_j|<\varepsilon$。作和式分解

$$\sum_{1\leqslant l<m\leqslant n} p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}=\Big(\sum_{\substack{1\leqslant l<N\\ l<m\leqslant n}}+\sum_{\substack{N\leqslant l<m\leqslant n\\ m-l<N}}+\sum_{\substack{N\leqslant l<m\leqslant n\\ m-l\geqslant N}}\Big)p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}。$$

和式 $\sum\limits_{\substack{1\leqslant l<N\\ l<m\leqslant N}} p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}$ 中每项都是不超过1的非负数，而且共有 $(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-N+1)=\frac{1}{2}(2n-N)(N-1)$ 项，故 $0\leqslant\frac{1}{n^2}\sum\limits_{\substack{1\leqslant l<N\\ l<m\leqslant n}}p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}\leqslant\frac{1}{2n^2}(2n-N)(N-1)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$。又和式 $\sum\limits_{\substack{N\leqslant l<m\leqslant n\\ m-l<N}}p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}$ 共有 $\frac{1}{2}(2n-3N+2)(N-1)$ 项，同前有 $0\leqslant\frac{1}{n^2}\sum\limits_{\substack{N\leqslant l<m\leqslant n\\ m-l<N}}p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}\leqslant\frac{1}{2n^2}(2n-3N+2)(N-1)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$。最后考察和式 $\sum\limits_{\substack{N\leqslant l<m\leqslant n\\ m-l\geqslant N}}p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}$，它共有 $\frac{1}{2}(n-2N+2)(n-2N+1)$ 项，而且每一项都有

$$(\pi_j-\varepsilon)^2\leqslant p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}\leqslant(\pi_j+\varepsilon)^2,\quad N\leqslant l<m,\quad m-l\geqslant N,$$

故

$$\begin{aligned}\frac{(\pi_j-\varepsilon)^2}{2}&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{N\leqslant l<m\leqslant n\\ m-l\geqslant N}}p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}\\&\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{N\leqslant l<m\leqslant n\\ m-l\geqslant N}}p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m-l)}\\&\leqslant\frac{(\pi_j+\varepsilon)^2}{2}\end{aligned}$$

由 ε 选择的任意性，令 $\varepsilon\downarrow 0$，并综合前面已证之结果即得式(14)，定理证完。

§2 转移概率平均的极限性质

仔细考察定理3及其推论，可以发现导致结论式(5)与式(6)的表述颇为繁复的原因在于状态具有周期 $d>1$，如果状态都是非周期的即 $d=1$，那么就得简明的结果式(7)，由此我们得到了启示：对于有周期的状态 j，尽管 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$ 未必存在，但是如果能够设法消除周期的影响，或许还可得到较简明的结果，因为算术平均可以减弱或消除周期的影响，于是采用 $\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}$ 这个转移概率的算术平均来替代 $p_{ij}^{(n)}$，可望极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}$ 存在。

$p_{jj}^{(m)}$ 是表示系统 $\sum$ 从状态 j 出发恰好在第 m 步返回状态 j 的概率。$\sum\limits_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}$ 表示系统 $\sum$ 在前面 n 步内系统 $\sum$ 到达状态 j 的次数，那么

$$\begin{aligned}E\Big[\sum_{m=1}^{n}\delta_{jX_m}|X_0=j\Big]&=\sum_{m=1}^{n}E[\delta_{jX_m}|X_0=j]\\&=\sum_{m=1}^{n}P(X_m=j|X_0=j)=\sum_{m=1}^{n}p_{jj}^{(m)}\end{aligned}\tag{15}$$

就表示系统 $\sum$ 从 j 出发在开头的 n 步内返回状态 j 的平均次数，于是 $\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{jj}^{(m)}$ 就表示系

统$\sum$从j出发在开初的一段单位时间内返回j的平均次数。当j是常返状态时，μ_{jj}表示$\sum$从j出发后又返回j的平均回转时间，从而$\frac{1}{\mu_{jj}}$就表示$\sum$从j出发在单位时间内返回j的平均次数，故$\frac{1}{\mu_{jj}}$与$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{jj}^{(m)}$具有类同的意义，只不过$\frac{1}{\mu_{jj}}$是对整个时间段$[0,\infty)$而言的，而$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{jj}^{(m)}$仅仅是对开初的时间段$[0,n]$而言的。

如果系统$\sum$开始是从状态i出发的，那么还要先考虑$\sum$自i能否到达j的附加情形，即要涉及f_{ij}。以上直观解释的合理性由下面的精确结论所证实。

定理 6　对任意的状态i，$j\in S$，必存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=\begin{cases}0, & \text{当 } j \text{ 是非常返的或零状态，}\\ \dfrac{f_{ij}}{\mu_{jj}}, & \text{当 } j \text{ 是正常返的。}\end{cases}\tag{16}$$

为证此定理，需要准备好下列分析结果：

引理 1　如果数列$\{a_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$有极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_m=a\tag{17}$$

证　对任给的$\varepsilon>0$，由假设条件必存在正整数N，当$n>N$时，都有$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_m-a\right|\leqslant\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{N}(a_m-a)\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{m=N+1}^{n}(a_m-a)\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{N}(a_m-a)\right|+\frac{\varepsilon}{2}\quad,$$

因为这里的N暂时固定，所以取足够大的n（$>N$）可使$\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{N}(a_m-a)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，将此代入上面的不等式，依极限定义，结论得证。

引理 2　设数列$\{a_n,n=1,2,\cdots\}$满足下列条件：有正整数d，并存在d个极限$\lim\limits_{l\to\infty}a_{ld+m}=b_m,m=1,\ 2,\ \cdots,\ d$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{d}(b_1+\cdots+b_d)。\tag{18}$$

证　因为有极限的数列必定有界，所以由假设条件必存在$a=\sup\{|a_n|,n=1,2,\cdots\}$。又任一正整数$n$总可写成$ld+m$的形式($l=0,1,\cdots,m=1,2,\cdots d$)。于是

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{d}(b_1+\cdots+b_d)\right|\leqslant\left|\frac{1}{n}\sum_{k=ld+1}^{ld+m}a_k\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{ld}a_k-\frac{1}{d}\sum_{m=1}^{d}b_m\right|$$
$$\leqslant\frac{da}{n}+\frac{1}{d}\sum_{m=1}^{d}\left|\frac{ld}{n}\cdot\frac{1}{l}\sum_{M=1}^{l}a_{Md+m}-b_m\right|,$$

当$n\to\infty$时，$\frac{da}{n}\to0$，而且$l\to\infty$，同时，

$$\frac{ld}{n}=\frac{ld+m}{n}-\frac{m}{n}=1-\frac{m}{n}\to0。$$

再由引理1，对每个$m=1,\ 2,\ \cdots,\ d$，都有

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{M=1}^{l}a_{Md+m}=b_m,$$

综上所证，断言 $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{d}\ (b_1+\cdots+b_d)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，式(18)成立，证完。

定理6的证明，如果状态 j 是非常返的或者是零状态，则由定理1与定理2，对任何 $i\in S$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$，再利用引理 1 便知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=0,\quad i\in S\quad 。$$

如果 j 是正常返状态，并有周期 d，则由定理 3、引理 2 及式(4)便得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}&=\frac{1}{d}\sum_{m=1}^{d}f_{ij}(m)\ \frac{d}{\mu_{jj}}\\&=\frac{1}{\mu_{jj}}\sum_{m=1}^{d}f_{ij}(m)=\frac{f_{ij}}{\mu_{jj}},\end{aligned}$$

定理证完。

由定理 6 及 Ⅱ.定理 15 即得下面的推论。

推论 如果齐次马氏链是不可分的，它的所有状态都是常返的，则对任意的状态 i，$j\in S$ 总有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=\frac{1}{\mu_{jj}}\quad ,\tag{19}$$

当 $\mu_{jj}=\infty$ 时，规定 $\frac{1}{\mu_{jj}}=0$。

定理 6 及其推论向我们指明：当 j 是正常返状态时，虽然极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$ 未必存在，但是平均的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}$ 恒存在，当马氏链还是不可分的，这时此极限值与初始状态 i 无关，与周期也无关。

定理 7 对齐次马氏链，依定理 6，对任何 i，$j\in S$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}$ 必存在，现记作 π_{ij}，又记 $\Pi=[\pi_{ij}]$ 方阵，则有

(i) $\Pi=\Pi P$，$\Pi=\Pi P^n$，$n=1$，2，…， (20)

(ii) $\Pi=P\Pi$，$\Pi=P^n\Pi$，$n=1$，2，…， (21)

(iii) $\Pi=\Pi^2$，$\Pi=\Pi^n$，$n=1$，2，…， (22)

(iv) $(P-\Pi)^n=P^n-\Pi$，$n=1$，2，…。 (23)

证 对任给的 i，$j\in S$，利用控制收敛定理与 C-K 方程有

$$\begin{aligned}\sum_{k\in S}\pi_{ik}p_{kj}&=\sum_{k\in S}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}^{(m)}\right)p_{kj}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}-\frac{p_{ij}}{n}+\frac{p_{ij}^{(n+1)}}{n}\right]=\pi_{ij}\quad ,\end{aligned}$$

故 $\Pi=\Pi P$。反复利用此式，由数学归纳法即得式(20)，(i)得证。类似地还可证得(ii)。

现证(iii)。对任一正整数 n，由式(21)有 $\Pi=P\Pi$，$\Pi=P^2\Pi$，…，$\Pi=P^n\Pi$，将这 n 个等式全加起来得 $n\Pi=(P+P^2+\cdots+P^n)\Pi$，即 $\Pi=\frac{1}{n}(P+P^2+\cdots+P^n)\Pi$，对此令 $n\to\infty$ 便得

$$\Pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(P+P^2+\cdots+P^n)\Pi=\Pi\Pi=\Pi^2,$$

反复利用此式，并用数学归纳法可得式(22)。

最后证(iv)。$(P-\Pi)^2=(P-\Pi)(P-\Pi)=P^2-P\Pi-\Pi P+\Pi^2$，由式(20)、(21)、(22)有 $(P-\Pi)^2=P^2-\Pi$，现作归纳假设，如果 $(P-\Pi)^n=P^n-\Pi$ 已成立，于是利用(21)、(20)、(22)便有

$$\begin{aligned}(P-\Pi)^{n+1}&=(P-\Pi)^n(P-\Pi)=(P^n-\Pi)(P-\Pi)\\&=P^{n+1}-P^n\Pi-\Pi P+\Pi^2=P^{n+1}-\Pi,\end{aligned}$$

由归纳法式(23)得证。定理证完。

下面将把定理 6 中转移概率平均的极限性质推广到比极限的情形。当然需要附加一定的限制条件。

定理 8　设 X 是不可分的齐次马氏链，其状态空间 S 的每个状态都是常返的，则对任意的状态 i，j，k，$r\in S$，必存在极限

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L}p_{kr}^{(n)}}。$$

证　(i) 首先在 $k=r=j\neq i$ 的特殊情况下证明定理。因为

$$\frac{\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}}=\frac{\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}}\left(\frac{1}{\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}}+1\right),$$

注意到 i、j 是常返的，利用Ⅱ. 定理4及Ⅱ. 定理13之(iii)、Ⅱ. 定理 15 便知存在极限

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}}=f_{ij}=1。\tag{24}$$

(ii) 其次在 $k=r=i\neq j$ 的特殊情况下证明定理。由Ⅱ. 定理 5 之(ii)，对任何正整数 L

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}&=\sum_{n=1}^{L}\left(\sum_{m=0}^{n-1}p_{ii}^{(m)}g_{ij}^{(n-m)}\right)=\sum_{m=0}^{L-1}p_{ii}^{(m)}\sum_{n=m+1}^{L}g_{ij}^{(n-m)}\\&=\sum_{m=0}^{L-1}p_{ii}^{(m)}\sum_{l=1}^{L-m}g_{ij}^{(l)},\end{aligned}$$

故

$$\frac{\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L}p_{ii}^{(n)}}=\frac{\sum_{m=0}^{L-1}p_{ii}^{(m)}\sum_{l=1}^{L-m}g_{ij}^{(l)}}{\sum_{m=0}^{L-1}p_{ii}^{(m)}}\cdot\frac{\sum_{m=0}^{L-1}p_{ii}^{(m)}}{\sum_{n=0}^{L-1}p_{ii}^{(n)}+p_{ii}^{(L)}-1},$$

因为 i 是常返的，由Ⅱ. 定理13之(iii)得

$$\frac{\sum_{m=0}^{L-1} p_{ii}^{(m)}}{\sum_{n=0}^{L-1} P_{ii}^{(n)} + p_{ii}^{(L)} - 1} = 1 + \frac{1 - p_{ii}^{(L)}}{\sum_{n=1}^{L} p_{ii}^{(n)}} \xrightarrow[L\to\infty]{} 1 \quad ,$$

再利用已有的分析结论：设非负数列$\{a_n, n=0,1,\cdots\}$使得$\dfrac{a_L}{\sum_{m=0}^{L} a_m} \xrightarrow[L\to\infty]{} 0$，又设数列$\{b_n, n=0,1,\cdots\}$有$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$，则

$$\frac{b_0 a_L + b_1 a_{L-1} + \cdots + b_L a_0}{\sum_{m=0}^{L} a_m} \xrightarrow[L\to\infty]{} b。 \tag{25}$$

取$a_n = p_{ii}^{(n)}$，$n=0, 1, \cdots$，$b_0=0$，$b_n=\sum_{l=1}^{n} g_{ij}^{(l)}$，$n=1, 2, \cdots$，$b=\sum_{l=1}^{\infty} g_{ij}^{(l)} = g_{ij}$，便有

$$\frac{\sum_{m=0}^{L-1} p_{ii}^{(m)} \sum_{l=1}^{L-m} g_{ij}^{(l)}}{\sum_{m=0}^{L-1} p_{ii}^{(m)}} \xrightarrow[L\to\infty]{} \sum_{l=1}^{\infty} g_{ij}^{(l)} = g_{ij} \quad .$$

总之存在极限

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{L} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L} p_{ii}^{(n)}} = g_{ij}。 \tag{26}$$

(iii) 最后证一般情形。由式(24)、(26)及极限性质

$$\frac{\sum_{n=1}^{L} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L} p_{kr}^{(n)}} = \frac{\sum_{n=1}^{L} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L} p_{jj}^{(n)}} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{L} p_{jj}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L} p_{jr}^{(n)}} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{L} p_{jr}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L} p_{rr}^{(n)}} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{L} p_{rr}^{(m)}}{\sum_{n=1}^{L} P_{kr}^{(n)}}$$

$$\xrightarrow[L\to\infty]{} f_{ij} \cdot \frac{1}{g_{jr}} \cdot f_{jr} \cdot \frac{1}{f_{kr}} = \frac{1}{g_{jr}} \quad ,$$

注意到X是不可分的，对常返状态j，r，必有$j \Rightarrow r$，于是依Ⅱ．定理8之(i)知$g_{jr}>0$。总之存在极限

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{L} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L} p_{kr}^{(n)}} = \frac{1}{g_{jr}}。 \tag{27}$$

定理证完。

注 如果X是不可分齐次马氏链。所有状态都是正常返的，这时定理8并没有给我们带来什么新的信息，因为定理6及Ⅱ．定理15，有

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{L} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L} p_{kr}^{(n)}} = \frac{f_{ij}/\mu_{jj}}{f_{kr}/\mu_{rr}} = \frac{\mu_{rr}}{\mu_{jj}}。 \tag{28}$$

然而，定理8的重要性在于它还适用于零常返状态的情形，这时在$L\to\infty$之下，平均比式

$\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{L}p_{ij}^{(n)}/\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{L}p_{kr}^{(n)}$虽然是$\frac{0}{0}$的不确定型，但是定理8指出此比式极限实际上是存在的，且还给出了极限值。

§3　平稳分布

$\{p_{ij}^{(n)}\}$的极限性质刻画了马尔科夫随机系统$\sum$随着转移步数的增大趋于稳定的性能，除此之外还应该考察系统$\sum$在由始到终的整个观测过程中是否也具有某种稳定的性能，这便启发我们去考察描述$\sum$的马氏链的有限维联合分布族，观察它们是否始终不随时间的推移而改变。

定义　设$X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$是状态空间为S、一步转移概率矩阵为$[p_{ij}]$的齐次马氏链，如果有一概率分布$\{\pi_i,i\in S\}$满足

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij},\quad j\in S,\tag{29}$$

则称$\{\pi_i,i\in S\}$是X的一个**平稳分布**。如果齐次马氏链X有一平稳分布$\{\pi_i,i\in S\}$，则由C-K方程，

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}=\sum_{i\in S}\Big(\sum_{k\in S}\pi_k p_{ki}\Big)p_{ij}=\sum_{k\in S}\pi_k\Big(\sum_{i\in S}p_{ki}p_{ij}\Big)=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}^{(2)}\quad,$$

再利用C-K方程和归纳法可得一般关系式：

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)},\quad j\in S,\quad n=1,2,\cdots。\tag{30}$$

定理9　设$\{\pi_i,i\in S\}$是齐次马氏链X的一个平稳分布，如果取$\{\pi_i,i\in S\}$为X的初始分布，即$P(X_0=i)=\pi_i$，$i\in S$，则对任何正整数n都有

$$P(X_n=i)=\pi_i,\quad i\in S。\tag{31}$$

进而对任意的正整数n，m，以及任意的$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$和任意的$i_1$，$i_2$，…，$i_n\in S$，有

$$P(X_{t_1+m}=i_1,\cdots,X_{t_n+m}=i_n)=P(X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_n}=i_n)。\tag{32}$$

证　由全概率公式及式(30)，对任何正整数n

$$\begin{aligned}P(X_n=i)&=\sum_{k\in S}P(X_0=k)P(X_n=i|X_0=k)\\&=\sum_{k\in S}\pi_k p_{ki}^{(n)}=\pi_i,\quad i\in S。\end{aligned}$$

式(31)得证。利用X的马氏性、齐次性、Ⅰ.定理1之(iv)以及上面已证的式(31)，得到要证的式(32)

$$\begin{aligned}P(X_{t_1+m}=i_1,\cdots,X_{t_n+m}=i_n)&=\pi_{i_1}p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}\\&=P(X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_n}=i_n)\quad。\end{aligned}$$

定理9说明：如果X有平稳分布$\{\pi_i,i\in S\}$，而且以它作为X的初始分布，则相应的系统$\sum$无论在何时n处于状态i的绝对概率恒为确定的π_i，不随n而异。而且$(X_{t_1+m},\cdots X_{t_n+m})$的联合分布与$(X_{t_1},\cdots X_{t_n})$的联合分布相同，即在整个观测过程中，有限维分布经时间推移都将保持不变，故X是严平稳随机序列，这反映了系统$\sum$就分布而言处在动态平衡之中，以上所述也就是平稳分布这一名称的含义。由此可见，对于一个齐次马氏链平稳分布是

否存在?如果存在，是否唯一?如何寻求计算平稳分布?等在理论与应用上都是极重要的问题。先在特殊的情况下来给出上述问题的解答。

定理 10 设 X 是不可分齐次马氏链，其状态空间 S 中的每个状态都是正常返的，或特别地都是遍历的，则此 X 恒有唯一的平稳分布 $\left\{\pi_j=\frac{1}{\mu_{jj}},j\in S\right\}$，其中 μ_{jj} 是 j 的平均回转时间。

证 对任意的正整数 n 有

$$\sum_{j\in S}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j\in S}p_{ij}^{(m)}=\frac{n}{n}=1,\quad i,j\in S,$$

由假设条件及定理 6 的推论，应用法都(Fatou)定理于上式，便得

$$\sum_{j\in S}\pi_j=\sum_{j\in S}\frac{1}{\mu_{jj}}=\sum_{j\in S}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sum_{j\in S}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=1。\tag{33}$$

又

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m+1)}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}\Big)=\sum_{k\in S}\Big(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}^{(m)}\Big)p_{kj},\qquad i,\ j\in S。\tag{34}$$

仍由定理 6 的推论及法都定理，从式(34)可得

$$\begin{aligned}\pi_j&=\frac{1}{\mu_{jj}}=\liminf_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\Big(\sum_{m=1}^{n+1}p_{ij}^{(m)}-p_{ij}\Big)\\&\geqslant\sum_{k\in S}\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}^{(m)}\Big)p_{kj}\\&=\sum_{k\in S}\pi_kp_{kj},\qquad j\in S。\end{aligned}\tag{35}$$

下面证明式(35)中只可能是等号成立。事实上，倘若有某个 $j(\in S)$ 使得 $\pi_j>\sum_{k\in S}\pi_kp_{kj}$，那么由式(33)、(35)便有

$$1\geqslant\sum_{j\in S}\pi_j>\sum_{j\in S}\Big(\sum_{k\in S}\pi_kp_{kj}\Big)=\sum_{k\in S}\pi_k\Big(\sum_{j\in S}p_{kj}\Big)=\sum_{k\in S}\pi_k,$$

导致矛盾。于是证得

$$\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_kp_{kj},\qquad j\in S。\tag{36}$$

利用式(36)及 C-K 方程有

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_ip_{ij}=\sum_{i\in S}\Big(\sum_{k\in S}\pi_kp_{ki}\Big)p_{ij}=\sum_{k\in S}\pi_k\Big(\sum_{i\in S}p_{ki}p_{ij}\Big)=\sum_{k\in S}\pi_kp_{kj}^{(2)}\quad,$$

反复利用式(36)及 C-K 方程，由归纳法知对任何正整数 n 有

$$\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_kp_{kj}^{(n)},\quad j\in S,\qquad n=1,2,\cdots。\tag{37}$$

由此可得

$$\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k\Big(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{kj}^{(m)}\Big),\quad j\in S,\quad n=1,2,\cdots,\tag{38}$$

显然 $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{kj}^{(m)}\leqslant1$，又依式(33)知式(38)右方的级数一致收敛，于是得

$$\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{kj}^{(m)}\Big)=\Big(\sum_{k\in S}\pi_k\Big)\pi_j,\quad j\in S。\tag{39}$$

据假设每个状态 $j(\in S)$ 都是正常返的，故 $\pi_j=\frac{1}{\mu_{jj}}>0$，从式(39)知 $\sum_{k\in S}\pi_k=1$。即 $\{\pi_j,j\in S\}$

是满足式(36)的概率分布，依定义它就是 X 的平稳分布。

设$\{\Phi_j, j\in S\}$是满足方程组(36)的概率分布。类似于式(37)、(38)的推导有：$\Phi_j=\sum_{k\in S}\Phi_k\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{kj}^{(m)}\right)$。同样此式右方级数一致收敛，令 $n\to\infty$取极限就得：$\Phi_j=\left(\sum_{k\in S}\Phi_k\right)\pi_j$，$j\in S$，由$\sum_{k\in S}\Phi_k=1$得 $\Phi_j=\pi_j$，$j\in S$，唯一性得证，定理证完。

注　设 X 是不可分齐次马氏链，所有状态都是遍历的，由定理 3 之推论知：对任何状态 i，j，都有$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_{jj}}\triangleq\pi_j$，依定理10此$\{\pi_j, j\in S\}$是 X 的平稳分布。值得注意的是：如果对任何状态 $i, j\in S$ 都存在极限$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$，而且此极限与 i 无关，记作 π'_j，那么$\{\pi'_j, j\in S\}$是否为 X 的平稳分布呢?考察所有状态都是非常返的齐次马氏链，依定理1有$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$，$i$，$j\in S$，即$\{\pi'_j=0, j\in S\}$，显然这不是平稳分布。

下面将对一般马氏链的平稳分布的存在性、唯一性、如何计算等问题作进一步讨论，为此先给出一个要用到的引理。根据Ⅱ.定理36，状态空间 S 可分解成如下的形式：

$$S=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots=Q\cup H,\quad H=\bigcup_{r\in\Gamma}C_r,\tag{40}$$

其中 D 是全体非常返状态集，Q 是全体非常返状态集与全体零状态集之并集，$\{C_1, C_2,\cdots\}$中的每一个都是由常返 状态构成的不可分闭集，而每个 $C_r(r\in\Gamma)$是由正常返状态构成的不可分闭集。

引理 3　对每个 $C_\gamma\subset H$，$\gamma\in\Gamma$，都有

$$\sum_{j\in C_\gamma}\frac{1}{\mu_{jj}}=1,\quad\gamma\in\Gamma。\tag{41}$$

证　因Ⅱ.定理34，可记 C_γ 中每个状态具有相同的周期为 d。根据Ⅱ.定理38，C_γ 有分解式 $C_\gamma=\sum_{m=0}^{d-1}G_m$ $(\gamma\in\Gamma)$，由定理 3 之推论，对任意的 i，$j\in G_m$ 有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_{jj}}。\tag{42}$$

于是由Ⅱ.定理39，若将 $P^d=[p_{ij}^{(d)}]$作为一步转移概率矩阵，则每个 $G_m(m=0,1,\cdots,d-1)$都是不可分闭集，而且其中的每个状态 $j\in G_m$ 都是非周期的。这时对 P^d 而言，由式(42)知有极限

$$\pi_j(d)\triangleq\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(d)(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_{jj}},\quad i,j\in G_m。\tag{43}$$

再依定理10有

$$\sum_{j\in G_m}\frac{d}{\mu_{jj}}=\sum_{j\in G_m}\pi_j(d)=1,\quad m=0,1,\cdots,d-1。\tag{44}$$

由此便得

$$\sum_{j\in C_\gamma}\frac{1}{\mu_{jj}}=\sum_{m=0}^{d-1}\sum_{j\in G_m}\frac{1}{\mu_{jj}}=\sum_{m=0}^{d-1}\frac{1}{d}=1,$$

引理证完。

在上面所作的准备与记号之下，现在可以来给出阐明平稳分布的存在性及其结构的定理了。

定理 11 设 $\pi_j \geqslant 0$，$j \in S$，$\sum_{j \in S} \pi_j < \infty$，则 $\{\pi_j, j \in S\}$ 为一齐次马氏链的平稳分布的充分必要条件是存在非负数列 $\{\lambda_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ 使得

(i) $\sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma = 1$； (45)

(ii) $\pi_j = 0$，$j \in Q$； (46)

(iii) $\pi_j = \dfrac{\lambda_\gamma}{\mu_{jj}}$，$j \in C_\gamma$，$\gamma \in \Gamma$。 (47)

证 先证必要性。如果 $\{\pi_j, j \in S\}$ 是马氏链 X 的平稳分布，当 $j \in Q$ 时，由定理1与定理2对任何 $i \in S$ 都有 $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。由平稳分布的定义及 C-K 方程，完全与式(37)的证明相同，可证得

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}, \quad j \in Q, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

此式右方的级数一致收敛，故

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i (\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}) = 0, \quad j \in Q。$$

当 $j \in C_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ 时，完全与式(38)的证明相同，可证得

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} \right), \quad j \in C_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

此式右方的级数也一致收敛，令 $n \to \infty$，并用定理 6 便有

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}, \quad j \in C_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma。 \tag{48}$$

由前面已证的结果，当 $i \in Q$ 时，$\pi_i = 0$，又每个 C_γ 是由正常返状态构成的不可分闭集，于是仅当 i，j 属于同一个 C_γ 时 $f_{ij} = 1$，而当 i，j 分别属于不同的闭集时 $f_{ij} = 0$，故由式(48)得

$$\pi_j = \Big(\sum_{i \in C_\gamma} \pi_i \Big) \frac{1}{\mu_{jj}}, \quad j \in C_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma。$$

令 $\lambda_\gamma = \sum_{i \in C_\gamma} \pi_i$，$\gamma \in \Gamma$，由上式便得 $\pi_j = \dfrac{\lambda_\gamma}{\mu_{jj}}$，$j \in C_\gamma$，$\gamma \in \Gamma$，而且

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big(\sum_{i \in C_\gamma} \pi_i \Big) = \sum_{i \in H} \pi_i = \sum_{i \in H} \pi_i + \sum_{i \in Q} \pi_i = \sum_{i \in S} \pi_i = 1。$$

再证充分性，假设存在 $\{\lambda_\gamma \geqslant 0, \gamma \in \Gamma\}$，使式(45)、(46)、(47)成立，由式(46)、(47)便知 $\pi_j \geqslant 0$，$j \in S$，而且利用引理 3 及式(45)即得

$$\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in H} \pi_j = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j \in C_\gamma} \frac{\lambda_\gamma}{\mu_{jj}} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma \Big(\sum_{j \in C_\gamma} \frac{1}{\mu_{jj}} \Big) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma = 1,$$

故 $\{\pi_j, j \in S\}$ 是一概率分布。下面再证它满足方程组(29)。即为马氏链的平稳分布。

当 $j \in Q$ 时，对任何 $i \in S$，因为 H 是闭集以及式(46)，便有

$$\sum_{i \in S} \pi_j p_{ij} = \sum_{i \in H} \pi_i p_{ij} + \sum_{i \in Q} \pi_i p_{ij} = 0 = \pi_j。$$

当 $j \in H$ 时，那么 j 必属于某个 $C_{\gamma_0} (\gamma_0 \in \Gamma)$，既然每个 C_γ 是不可分闭集，于是当 $i \in H - C_{\gamma_0}$ 时，$p_{ij} = 0$，再由式(46)、(47)可得

$$\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in H} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in C_{\gamma_0}} \pi_i p_{ij} = \lambda_{\gamma_0} \Big(\sum_{i \in C_{\gamma_0}} \frac{1}{\mu_{ii}} p_{ij} \Big)。 \tag{49}$$

根据引理3，对任给的 $\varepsilon > 0$，必存在仅含有限多个状态的集 B_{γ_0} 使得 $B_{\gamma_0} \subset C_{\gamma_0}$ 而且 $\sum_{i \in C_{\gamma_0} - B_{\gamma_0}} \dfrac{1}{\mu_{ii}}$

$<\varepsilon$，于是从式(49)知

$$\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}<\lambda_{\gamma_0}\left(\sum_{i\in B_{\gamma_0}}\frac{1}{\mu_{ii}}p_{ij}\right)+\varepsilon,\quad j\in C_{\gamma_0}\subset H。\tag{50}$$

对任何状态 $k\in C_{\gamma_0}$，由定理6、Ⅱ.定理15，便得

$$\sum_{i\in B_{\gamma_0}}\frac{p_{ij}}{\mu_{jj}}=\sum_{i\in B_{\gamma_0}}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ki}^{(m)}\right\}p_{ij}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{kj}^{(m+1)}=\frac{1}{\mu_{jj}}。\tag{51}$$

从而，由式(50)、(51)以及 ε 的任意性，得

$$\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}\leqslant\frac{\lambda_{\gamma_0}}{\mu_{jj}}=\pi_j,\quad j\in C_{\gamma_0}\subset H,\gamma_0\in\Gamma,\tag{52}$$

倘若有 $j\in H$ 使式(52)中的等号不成立，那么由假设 $\sum_{j\in S}\pi_j<\infty$，将式(52)两边对所有的 $j\in H$ 求和，并注意到 $j\in Q$ 时已证的结果，便导致 $\sum_{i\in S}\pi_i<\sum_{j\in S}\pi_j$ 的矛盾，故只能有 $\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}=\pi_j$，$j\in H$。综上所证得本定理。

推论 对于齐次马氏链：

(i) 其平稳分布存在的充要条件是存在正常返不可分闭集。等价地，不存在平稳分布的充要条件是 $H=\varnothing$。

(ii) 存在唯一的平稳分布的充要条件是恰有一个正常返不可分闭集。

(iii) 有无限多个平稳分布的充要条件是至少有两个不同的正常返不可分闭集。

(iv) 不可分齐次马氏链存在唯一的平稳分布的充要条件是所有状态都是正常返的。

证 (i) 如果 $H=\varnothing$，便找不到满足条件：式(45)、(46)、(47)的非负数列$\{\lambda_\gamma,\gamma\in\Gamma\}$和概率分布$\{\pi_j,j\in S\}$，依定理11平稳分布不存在。若 $H\neq\varnothing$，则至少有一个正常返不可分闭集 C_γ，$\gamma\in\Gamma\neq\varnothing$，这时总可构造出满足式(45)、(46)、(47)的非负数列$\{\lambda_\gamma,\gamma\in\Gamma\}$及$\{\pi_j,j\in S\}$，依定理11，$\{\pi_j,j\in S\}$便是马氏链的平稳分布，(i)得证。

当状态空间 S 中恰含有一个正常返不可分闭集 C_γ，即 Γ 为单点集$\{\gamma\}$，这时 λ_γ 只有唯一的选择 $\lambda_\gamma=1$，依定理11只能构造出唯一的平稳分布，(ii)得证。若 S 至少含有两个不同的正常返不可分闭集，则 Γ 含有两个以上的元素，于是可以构造出无限多个满足条件式(45)、(46)、(47)的$\{\lambda_\gamma,\gamma\in\Gamma\}$及$\{\pi_j,j\in S\}$。由定理11每个$\{\pi_j,j\in S\}$都是平稳分布，(iii)得证。

最后由不可分的定义及已证的(i)与(ii)，即得(iv)，推论证完。

定理 12 不可分齐次马氏链 X 具有平稳分布(或为正常返)的充要条件是线性方程组：

$$z_j=\sum_{i\in S}z_i p_{ij},\quad j\in S。\tag{53}$$

有非零的绝对收敛解$\{W_j,j\in S\}$，即$0<\sum_{j\in S}|w_j|<\infty$。而且此时还有

$$W_j=\left(\sum_{i\in S}W_i\right)\frac{1}{\mu_{jj}},\quad j\in S。\tag{54}$$

证 必要性。如果 X 有平稳分布，则由定理11的推论之(i)知 X 的所有状态都是正常返的，再由定理10知$\{\pi_j=\frac{1}{\mu_{jj}},j\in S\}$是 X 平稳分布。依平稳分布的定义，$\left\{\frac{1}{\mu_{jj}},j\in S\right\}$就是方程组(53)的非零绝对收敛解。

证充分性。如果方程组(53)有非零的绝对收敛解$\{W_j,j\in S\}$，利用 C-K 方程，绝对收敛性及傅比尼定理有

$$\sum_{i\in S}W_i p_{ij}^{(2)}=\sum_{i\in S}W_i\sum_{k\in S}p_{ik}p_{kj}=\sum_{k\in S}\Big(\sum_{i\in S}W_i p_{ik}\Big)p_{kj}=\sum_{k\in S}W_k p_{kj}=W_j,\quad j\in S。$$

由此利用归纳法对任何正整数 n 都有

$$W_j=\sum_{i\in S}W_i p_{ij}^{(n)}\quad j\in S。$$

因此可得

$$W_j=\sum_{i\in S}W_i\Big(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}\Big),\quad n=1,2,\cdots.$$

由于绝对收敛的假设，上式右方级数一致收敛，从而有

$$W_j=\sum_{i\in S}W_i\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}\Big),\quad j\in S。\tag{55}$$

已假设$\{W_j,j\in S\}$是非零的，那么必有某 j 使 $W_j\neq 0$，故在式(55)中不可能对所有 $i\in S$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=0$，由定理6，只可能是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=\frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}$，并有 i 使$\frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}>0$，于是$\frac{1}{\mu_{jj}}>0$，这表明 j 是正常返状态，又因 X 是不可分的，故 S 中每个状态都是正常返的，由定理10便知 X 有平稳分布。仍由式(55)及上述道理，同时注意到 Ⅱ.定理15，即得式(54)。证毕。

注 定理 12 不仅给出了不可分齐次马氏链存在平稳分布的代数判别法，同时还给出了寻求平稳分布的一种代数方法，即求线性方程组(53)的非零绝对收敛解$\{W_j,j\in S\}$，然后由式(54)得平稳分布$\left\{\pi_i\,\frac{1}{\mu_{jj}}=\frac{W_j}{\sum\limits_{i\in S}W_i},j\in S\right\}$。

例 1 设齐次马氏链 X 的状态空间 $S=\{0,1,\cdots\}$，一步转移概率矩阵是

$$P=\begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\tag{56}$$

其中 $p_i>0$，$r_i\geqslant 0$，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ q_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r_0+p_0=1,\ q_i+r_i+p_i=1,\ i=1,\ 2,\ \cdots$。容易看出对任何状态 $i\in S$，$i\Leftrightarrow i+1$，从而任何两个状态互通，所以 X 不可分。称此 X 作具有一个反射壁"0"的随机徘徊。为考察 X 的平稳分布，讨论相应于(53)的方程组：

$$\begin{cases} z_0=r_0z_0+q_1z_1, \\ z_i=p_{i-1}z_{i-1}+r_iz_i+q_{i+1}z_{i+1},\quad i=1,2,\cdots, \end{cases}\tag{57}$$

它可化成

$$\begin{cases} q_1z_1-p_0z_0=0, \\ q_{i+1}z_{i+1}-p_iz_i=q_iz_i-p_{i-1}z_{i-1},\quad i=1,2,\cdots, \end{cases}$$

由此可见

$$q_{i+1}z_{i+1}-p_iz_i=0,\quad i=0,1,\cdots,$$

$$z_{i+1}=\frac{p_i}{q_{i+1}}z_i=\cdots=\frac{p_i\cdots p_0}{q_{i+1}\cdots q_1}z_0=\frac{p_0}{p_{i+1}}\cdot\frac{1}{\rho_{i+1}}z_0,\quad i=0,1,\cdots,\tag{58}$$

其中 $\rho_i=\frac{q_1\cdots q_i}{p_1\cdots p_i}$，$i=1,\ 2,\ \cdots$。根据定理12，$X$ 有平稳分布的充要条件是方程组(57)有非零绝对收敛解，即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i\rho_i}<\infty$，这时由式(54)、(58)知

$$\pi_0=\left(1+p_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i\rho_i}\right)^{-1},\quad \pi_i=\frac{p_0}{p_i}\frac{\pi_0}{\rho_i},\quad i=1,2,\cdots \tag{59}$$

是 X 的平稳分布，而且依定理11之推论，这是唯一的平稳分布。

特别地，当 $p_i=p$，$q_i=q$，$i=1, 2, \cdots$时，$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i\rho_i}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^i$，于是 X 有平稳分布的充要条件是 $p<q$，而且这时 X 的平稳分布为

$$\pi_0=\frac{q-p}{q-p+p_0},\quad \pi_i=\frac{p_0(q-p)}{p(q-p+q_0)}\left(\frac{p}{q}\right)^i,\quad i=1,2,\cdots。 \tag{60}$$

如果还有 $p_0=p$，那么 X 的平稳分布转化成几何分布：

$$\pi_i=\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^i,\quad i=0,1,\cdots。 \tag{61}$$

作为本节的结束，我们回忆并比较定理 10 及其注。又如果齐次马氏链 X 的每个状态都是遍历的，而且有多于两个的正常返不可分闭集 C_r，$r\in\Gamma$，那么定理 3 已指出这时必存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=f_{ij}^{(1)}\frac{1}{\mu_{jj}}$，尽管此极限与 i 有关，但是由定理11之推论，X 却有无限多个平稳分布。上面的论述说明：§1、§2所讨论的转移概率的极限性质是反映系统的渐近稳定性，§3所讨论的平稳分布的存在性、唯一性反映的是系统从始至终一贯的稳定性，两者之间有联系，但又有区别。

§4　计算首达概率与平均首达时间的代数方法

无论是在考察转移概率的极限性质，计算$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$与$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}$时，还是在判断一个状态是否为常返的或正常返时，都需要知道首次到达概率 f_{ij}和平均回转时间 μ_{jj}。虽然在理论上已有杜伯林公式可用来求出 f_{ij}，有 Ⅱ．定理13可用来判别状态的常返性，但是具体使用这些定理时，首先必须算出多步转移概率矩阵，其计算量是相当大的，往往不是切实可行的。值得庆幸的是对于马氏链的一些概率数字特征常常是某种线性方程组的解，恰好 f_{ij}、μ_{jj}也不例外，因此可借助求解这类线性方程组的代数方法，以便达到求得 f_{ij}、μ_{jj}之目的。并且这种代数方法也提供了一种鉴别状态类型的有效方法，其实在定理12中已经显示出这种方法的作用。为使读者能够较完整地理解这种方法，先集中地给出几个有用的关于线性代数方程组求解的引理。

1．线性方程组的非负解

引理 4　已给线性方程组

$$z_i=\sum_{j\in S}a_{ij}z_j+b_i,\quad i\in S, \tag{62}$$

其中 $a_{ij}\geqslant 0$，$b_i\geqslant 0$，i，$j\in S$，S 是可数集。令

$$u_i^{(1)}=b_i,\quad u_i^{(n+1)}=\sum_{j\in S}a_{ij}u_j^{(n)},\quad n=1,2,\cdots,\quad i\in S, \tag{63}$$

$$W_i=\sum_{n=1}^{\infty}u_i^{(n)},\quad i\in S, \tag{64}$$

则$\{W_i, i\in S\}$是线性方程组(62)的最小非负解。

证　由假定、式(63)、(64)及傅比尼定理有

$$W_i=\sum_{n=1}^{\infty}u_i^{(n)}=u_i^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}u_i^{(n+1)}=b_i+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in S}a_{ij}u_j^{(n)}$$

$$=b_i+\sum_{j\in S}a_{ij}\sum_{n=1}^{\infty}u_j^{(n)}=b_j+\sum_{j\in S}a_{ij}W_j。$$

显然每个 $W_i\geqslant 0$，$i\in S$，所以$\{W_i,i\in S\}$是(62)的非负解。

设$\{Y_i,i\in S\}$也是(62)的非负解，则可证 $W_i\leqslant Y_i$，$i\in S$。为此只要证对一切 $n=1,2,\cdots$ 都有

$$Y_i\geqslant W_i^{(n)}\triangleq\sum_{m=1}^{n}u_i^{(m)},\quad i\in S \tag{65}$$

即可。当 $n=1$时，

$$Y_i=\sum_{j\in S}a_{ij}Y_j+b_i\geqslant b_i=u_i^{(1)}=W_i^{(1)},i\in S,$$

即式(65)对 $n=1$成立。现在设(65)对 $n=L$ 已成立，则

$$Y_i=\sum_{j\in S}a_{ij}Y_j+b_i\geqslant\sum_{j\in S}^{L}a_{ij}W_j^{(L)}+b_i\triangleq\sum_{j\in S}a_{ij}\sum_{m=1}u_j^{(m)}+b_i$$

$$=\sum_{m=1}^{L}\sum_{j\in S}a_{ij}u_j^{(m)}+u_i^{(1)}=\sum_{m=1}^{L}u_i^{(m+1)}+u_i^{(1)}=W_i^{(L+1)}, \tag{66}$$

即(65)对 $n=L+1$仍成立，由数学归纳法得知式(65)对一切正整数 n 都成立，引理证完。

注　引理 4 中涉及到的级数都是非负数项级数，即使发散，结果仍然成立。

引理 5　设$\{W_i,i\in S\}$是线性方程组(62)的最小非负解，又 $G\subset S$，则线性方程组

$$z_i=\sum_{j\in G}a_{ij}z_j+\Big(\sum_{j\in S-G}a_{ij}W_j+b_i\Big),\quad i\in G \tag{67}$$

的最小非负解为$\{W_i,i\in G\}$。

证　由假设，显然$\{W_i,i\in G\}$是线性方程组(67)的非负解。现设$\{Y_i,i\in G\}$是式(67)的最小非负解，那么$0\leqslant Y_i\leqslant W_i$，$i\in G$。下面再证反向不等式也成立。

令 $v_i^{(1)}=\sum_{j\in S-G}a_{ij}W_j+b_i$，$v_i^{(n+1)}=\sum_{j\in G}a_{ij}v_j^{(n)}$，$i\in G$，$n=1,2,\cdots$，由引理4知 $Y_i=\sum_{n=1}^{\infty}v_i^{(n)}$，$i\in G$。若记 $Y_i^{(n)}\triangleq\sum_{m=1}^{n}v_i^{(m)}$，$i\in G$，$n=1,2,\cdots$，则

$$Y_i^{(n+1)}=v_i^{(1)}+\sum_{m=2}^{n+1}v_i^{(m)}=v_i^{(1)}+\sum_{m=2}^{n+1}\Big(\sum_{j\in G}a_{ij}v_j^{(m-1)}\Big)$$

$$=v_i^{(1)}+\sum_{j\in G}a_{ij}\Big(\sum_{m=2}^{n+1}v_j^{(m+1)}\Big)$$

$$=v_i^{(1)}+\sum_{j\in G}a_{ij}Y_i^{(n)},\quad i\in G,n=1,2,\cdots。 \tag{68}$$

当 $n=1$时，

$$Y_i^{(1)}=v_i^{(1)}=\sum_{j\in S-G}a_{ij}W_j+b_i\geqslant b_i=W_i^{(1)},\quad i\in G。$$

假设 $n=L$ 时，已有 $Y_i^{(L)}\geqslant W_i^{(L)}$，$i\in G$，则由式(68)、(66)，并注意到 $W_j\geqslant W_j^{(L)}\geqslant 0$，$j\in S$。

$$Y_i^{(L+1)}=v_i^{(1)}+\sum_{j\in G}a_{ij}Y_j^{(L)}\geqslant\sum_{j\in G}a_{ij}W_j^{(L)}+\sum_{j\in S-G}a_{ij}W_j^{(L)}+b_i=W_j^{(L+1)}\quad,$$

应用归纳法知：对一切正整数 n，都有 $Y_i^{(n)}\geqslant W_i^{(n)}$，$i\in G$，从而 $Y_i\geqslant W_i$，$i\in G$。综合两个不等

式得 $W_i=Y_i$，$i\in G$，引理证完。

引理 6　在线性方程组(62)

$$z_i=\sum_{j\in S}a_{ij}z_j+b_i,\quad i\in S$$

中，设 $a_{ij}\geqslant 0$，i，$j\in S$，又

$$b_i=\sum_{n=1}^{\infty}b_i^{(n)},\quad b_i^{(n)}\geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots,\quad i\in S\ ,\tag{69}$$

令

$$\bar{u}_i^{(1)}\triangleq b_i^{(1)},\quad \bar{u}_i^{(n+1)}\triangleq\sum_{j\in S}a_{ij}\bar{u}_j^{(n)}+b_i^{(n+1)},\quad n=1,2,\cdots,\quad i\in S\ ,\tag{70}$$

$$\overline{W}_i\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_i^{(n)},\quad i\in S\ ,\tag{71}$$

则 $\{\overline{W}_i,i\in S\}$ 是线性方程组(62)的最小非负解。

证　由各个记号的含义及傅比尼定理有

$$\begin{aligned}\overline{W}_i&\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_i^{(n)}=\bar{u}_i^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_i^{(n+1)}\\&=b_i^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{j\in S}a_{ij}\bar{u}_j^{(n)}+b_i^{(n+1)}\Big)\\&=\sum_{j\in S}a_{ij}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_j^{(n)}\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}b_i^{(n)}\\&=\sum_{j\in S}a_{ij}\overline{W}_j+b_i,\quad i\in S,\end{aligned}$$

故 $\{\overline{W}_i,i\in S\}$ 是(62)的非负解。

设 $\{W_i,i\in S\}$ 是(62)的最小非负解，采用引理4中同样的记号。当 $n=1$ 时，$\overline{W}_i^{(1)}\triangleq\bar{u}_i^{(1)}=b_i^{(1)}\leqslant b_i=u_i^{(1)}=W_i^{(1)}$，$i\in S$。现在假设 $n=L$ 时，已有 $\overline{W}_i^{(L)}\triangleq\sum_{m=1}^{L}\bar{u}_i^{(m)}\leqslant\sum_{m=1}^{L}u_i^{(m)}\triangleq W_i^{(L)}$，$i\in S$，则由式(69)、(70)

$$\begin{aligned}\overline{W}_i^{(L+1)}&\triangleq\bar{u}_i^{(1)}+\sum_{m=1}^{L}\bar{u}_i^{(m+1)}=b_i^{(1)}+\sum_{m=1}^{L}\sum_{j\in S}a_{ij}\bar{u}_j^{(m)}+\sum_{m=1}^{L}b_i^{(m+1)}\\&=\sum_{m=1}^{L+1}b_i^{(m)}+\sum_{j\in S}a_{ij}\sum_{m=1}^{L}\bar{u}_j^{(m)}\leqslant b_i+\sum_{j\in S}a_{ij}\sum_{m=1}^{L}u_j^{(m)}\\&=\sum_{m=1}^{L+1}u_j^{(m)}\triangleq W_i^{(L+1)},\quad i\in S。\end{aligned}$$

应用归纳法知：对任何正整数 n 都有 $\overline{W}_i^{(n)}\geqslant W_i^{(n)}$，$i\in S$，从而 $\overline{W}_i\geqslant W_i$，$i\in S$，故只能是 $\overline{W}_i=W_i$，$i\in S$。引理得证。

为了探讨线性方程组(62)解的唯一性，我们等价地来讨论相应齐次线性方程组只有零解的情形。

引理 7　已给齐次线性方程组

$$\begin{cases}z_i=\sum_{j\in S}a_{ij}z_j,\\|z_i|\leqslant 1,\end{cases}\quad i\in S\ ,\tag{72}$$

其中 $a_{ij}\geqslant 0$，$\sum_{j\in S}a_{ij}\leqslant 1$，$i$，$j\in S$。令

$$u_i^{(1)} = \sum_{j\in S} a_{ij}, \quad u_i^{(n+1)} = \sum_{j\in S} a_{ij} u_j^{(n)}, \quad n = 1,2,\cdots, \quad i \in S,$$

则对任何 $i\in S$，当 $n\to\infty$ 时，$u_i^{(n)}\downarrow u_i$，而且 $\{u_i, i\in S\}$ 是方程组(72)的解。如果 $\{v_i, i\in S\}$ 也是方程组(72)的解，则 $|v_i|\leqslant u_i$，$i\in S$，即 $\{u_i, i\in S\}$ 是方程组(72)的最大解。

证 因假设条件 $0\leqslant u_i^{(1)}\leqslant 1$，$i\in S$，$0\leqslant u_i^{(2)}\triangleq \sum_{j\in S} a_{ij}u_j^{(1)}\leqslant \sum_{j\in S} a_{ij}=u_i^{(1)}$，$i\in S$。若已知 $0\leqslant u_i^{(n)}\leqslant u_i^{(n-1)}$，$i\in S$，那么

$$\begin{aligned} u_i^{(n+1)} &\triangleq \sum_{j\in S} a_{ij} u_j^{(n)} \\ &\leqslant \sum_{j\in S} a_{ij} u_j^{(n-1)} \triangleq u_i^{(n)}, \quad i \in S。\end{aligned}$$

由此可见 $\{u_i^{(n)}, n=1,2,\cdots\}$，$i\in S$ 都是单调下降非负有界的1的数列，必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_i^{(n)}=u_i$，$i\in S$，注意到级数 $\sum_{j\in S} a_{ij}u_j^{(n)}$ 关于 n 一致收敛，于是

$$u_i = \lim_{n\to\infty} u_i^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} a_{ij}u_j^{(n)} = \sum_{j\in S} a_{ij} \lim_{n\to\infty} u_j^{(n)} = \sum_{j\in S} a_{ij}u_j, \quad i \in S。$$

即 $\{u_i, i\in S\}$ 是方程组(72)的解，显然 $0\leqslant u_i\leqslant 1$，$i\in S$。

对方程组(72)的任一解 $(v_i, i\in S)$，应有 $|v_i|\leqslant 1$，$i\in S$。而且 $|v_i|\leqslant \sum_{j\in S} a_{ij}|v_j|\leqslant \sum_{j\in S} a_{ij}\triangleq u_i^{(1)}$，$i\in S$，如果已有 $|v_i|\leqslant u_i^{(n)}$，$i\in S$，那么

$$|v_i| \leqslant \sum_{j\in S} a_{ij}|v_j| \leqslant \sum_{j\in S} a_{ij}u_j^{(n)} \triangleq u_i^{(n+1)}, \quad i \in S,$$

即对任一正整数 n 都有 $|v_i|\leqslant u_i^{(n)}$，$i\in S$。从而 $|v_i|\leqslant u_i$，$i\in S$。引理得证。

注 当 $u_i=0, i\in S$ 时，由引理 7 知齐次线性方程组(72)有唯一的零解。这时相应的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} z_i = \sum\limits_{j\in S} a_{ij} z_j + b_i, \\ |z_i| \leqslant 1, \end{cases} \quad i \in S \tag{73}$$

仅有唯一解。

下面将应用这些结论去求解 f_{ij}、μ_{ij} 或判别状态类型。

2. 首达概率与平均首达时间的方程解

先讨论首次到达概率。

定理 13 对任意的状态 $j\in S$，首次到达 j 的概率 $\{f_{ij}, i\in S\}$ 是线性方程组

$$z_i = \sum_{k\neq j} p_{ik} z_k + p_{ij}, \quad i \in S \tag{74}$$

的最小非负解。

证 由式 Ⅱ.(1)、(8)、(6)知：$f_{ij}^{(1)}=p_{ij}$、$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$、$f_{ij}^{(n+1)}=\sum_{k\neq j} p_{ik}f_{kj}^{(n)}$，$n=1,2,\cdots$。完全类似于引理 4 的证明，即得本定理。

定理 14 D 的所有非常返状态之集，对状态 j 记 $S(j)\triangleq\{j\}\cup\{i: i\in S, i\Leftrightarrow j\}$。

(i) 如果状态 j 是常返的，则 $\{f_{ij}, i\in D\}$ 是下列线性方程组的最小非负解，

$$z_i = \sum_{k\in D} p_{ik} z_k + \sum_{k\in S(j)} p_{ik}, \quad i \in D。\tag{75}$$

(ii) 如果状态 j 是非常返的，则 $\{f_{ij}, i\in D\}$ 是下列线性方程组的最小非负解，

$$z_i = \sum_{\substack{k\in D\\k\neq j}} p_{ik}z_k + p_{ij}, \quad i\in D。\tag{76}$$

证　由定理 13 知

$$f_{ij} = \sum_{k\neq j} p_{ik}f_{kj} + p_{ij}, \quad i,j\in S\quad。\tag{77}$$

当 j 为常返状态时，对常返状态 k，由 Ⅱ．定理15，如果 $k\in S(j)$，则 $f_{kj}=1$，若 $k\notin S(j)$，则 $f_{kj}=0$，于是从式(77)导致

$$f_{ij} = \sum_{k\in D} p_{ik}f_{kj} + \sum_{k\in S(j)} p_{ik}, \quad i\in D。\tag{78}$$

当 j 为非常返状态时，对常返状态 k，由 Ⅱ．定理 7 定理 14 知 $f_{kj}=0$，于是从式(77)导致

$$f_{ij} = \sum_{\substack{k\in D\\k\neq j}} p_{ik}f_{kj} + p_{ij}, \quad i\in D。\tag{79}$$

由此可见方程组(75)是方程组(74)在 j 为常返的条件下，取引理 5 中的 G 为 D 而得，方程组(76)是方程组(74)在 j 为非常返的条件下，取引理 5 中的 G 为 D 而得，于是由引理 5 即得本定理。

推论　如果状态 j 与 k 属于同一个常返类，则

$$f_{ij} = f_{ik}, \quad i\in D。\tag{80}$$

证　当状态 j、k 同属于一个常返类时，则有 $S(j)=S(k)$，于是由定理14之(i)知$\{f_{ij}, i\in D\}$与$\{f_{ik}, i\in D\}$是同一个线性方程组(75)的最小非负解，故得式(80)。

定理15　令

$$\alpha_i = p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(X_n\in D)\,|\,X_0=i\right), \quad i\in D\quad。\tag{81}$$

即 α_i $(i\in D)$ 是系统 $\sum$ 自非常返状态 i 出发永远留在 D 中不到达 $D^c=S-D$ 的概率，则

(i) $\{\alpha_i, i\in D\}$是如下方程组的最大解：

$$\begin{cases} z_i = \sum\limits_{j\in D} p_{ij}z_j, \\ |z_i|\leqslant 1, \end{cases} \quad i\in D\quad。\tag{82}$$

(ii) $\alpha_i=0$，$i\in D$ 的充分必要条件是方程组：$z_i=\sum\limits_{j\in D} p_{ij}z_j$，$i\in D$，无非零的有界解。

证　记 $\alpha_i^{(n)}\triangleq P\left(\bigcap\limits_{m=1}^{n}(X_m\in D)\,|\,X_0=i\right)$，　$i\in D$，$n=1$，，2，…，$\alpha_i^{(n)}$ 表示$\sum$自 $i(\in D)$出发直到 n 时，$\sum$一直处在 D 中的概率，显然 $\alpha_i^{(1)}=P\,(X_1\in D|X_0=i)\;=\sum\limits_{j\in D}p_{ij}\leqslant 1$，$0\leqslant\alpha_i^{(n+1)}\leqslant\alpha_i^{(n)}$，$n=1$，2，…，$i\in D$。应用马氏性、齐次性，对任何正整数 n 及 $i\in D$，

$$\begin{aligned}\alpha_i^{(n+1)} &= P\left(\bigcap_{m=1}^{n+1}(X_m\in D)\,|\,X_0=i\right)\\ &= \sum_{j\in D}(PX_1=j, X_2\in D,\cdots,X_{n+1}\in D\,|\,X_0=i)\\ &= \sum_{j\in D}p_{ij}P\left(\bigcap_{m=2}^{n+1}(X_m\in D)\,|\,X_1=j\right)\\ &= \sum_{j\in D}p_{ij}\alpha_j^{(n)},\end{aligned}\tag{83}$$

于是由引理 7 或概率的连续性定理知：当 $n\to\infty$时，$\alpha_i^{(n)}\downarrow\alpha_i$，$i\in D$，而且$\{\alpha_i, i\in D\}$是方程组

(82)的最大解，(i)得证。

如果齐次线性方程组(82)无非零的有界解，则只有唯一的有界零解，又因(i)必得 $a_i=0$，$i\in D$。反之，若 $a_i=0$，$i\in D$，因为$\{a_i, i\in D\}$是最大解，所以方程组(82)只有有界零解，不可能有非零的有界解，(ii)得证。

定理 16 记 C 是 I．定理 36 状态空间分解中的任一常返不可分闭集即常返本质类。令

$$f_{ic}\triangleq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n\in C)\,|\,X_0=i\right),\quad i\in D,\tag{84}$$

f_{ic}是$\sum$自非常返状态 i 出发终于要到达常返本质类 C 的概率，则

(i) $\{f_{ic}, i\in D\}$是下列非齐次线性方程组的解：

$$z_i=\sum_{j\in C}p_{ij}+\sum_{j\in D}p_{ij}z_j,\quad i\in D。\tag{85}$$

(ii) 方程组(85)有唯一的有界解的充分必要条件是式(81)定义的 $a_i=0$，$i\in D$。

证 对任一 $i\in D$ 及正整数 n，以 $f_{ic}^{(n)}$记$\sum$自非常返状态 i 出发于 n 时首次到达常返本质类 C 的概率。应用马氏性、齐次性及各记号之意义有

$$f_{ic}^{(1)}=\sum_{j\in C}p_{ij},\quad f_{ic}^{(n)}=\sum_{j\notin C}p_{ij}f_{jc}^{(n-1)},\quad n\geqslant 2;\quad f_{ic}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ic}^{(n)}\quad ,\tag{86}$$

由此便得

$$\begin{aligned}f_{ic}&=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ic}^{(n)}=\sum_{j\in C}p_{ij}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j\notin C}p_{ij}f_{jc}^{(n-1)}\right)\\&=\sum_{j\in C}p_{ij}+\sum_{j\notin C}p_{ij}\left(\sum_{n=2}^{\infty}f_{jc}^{(n-1)}\right)\\&=\sum_{j\in C}p_{ij}+\sum_{j\notin C}p_{ij}f_{jc},\quad j\in D。\end{aligned}$$

注意到当 j 属于不同于 C 的另一个常返本质类 C' 时，因为 C' 是不可分闭集，所以 $f_{jc}=0$，$j\in C'$。将此代入上式即得

$$f_{ic}=\sum_{j\in C}p_{ij}+\sum_{j\in D}p_{ij}f_{jc},\quad i\in D,\tag{87}$$

这表明$\{f_{ic}, i\in D\}$满足方程组(85)，(i)得证。

如果方程组(85)有两个不同的有界解：$\{W_i^{(1)}, i\in D\}$，$\{W_i^{(2)}, i\in D\}$，则其差$\{W_i^{(1)}-W_i^{(2)}$，$i\in D\}$必为方程组(82)的非零有界解，这表明方程组(85)有唯一的有界解等价于方程组(82)无非零的有界解，再由定理15之(ii)即得本定理之(ii)，证完。

其次讨论平均首次到达时间。

定理 17 记 $T_D\triangleq\min\{n\geqslant 1: X_n\in D^c\}$，即 T_D 是$\sum$首次到达常返状态集 D^c 的随机时刻。又设 $P(T_D<\infty|X_0=i)=1$，$i\in D$，即$\sum$从任一非常返状态 i 出发，以概率1迟早要进入常返状态集。取条件数学期望 $E_i\triangleq E(T_D|X_0=i)$，$i\in D$，则$\{E_i, i\in D\}$是线性方程组

$$z_i=\sum_{j\in D}p_{ij}z_j+1,\quad i\in D\tag{88}$$

的最小非负解。

证 对 $i\in D$，记$\{E_i^{(1)}\triangle P(T_D=1|X_0=i)=P(X_1\in D^c|X_0=i)\geqslant 0$，$E_i^{(n)}\triangle P(T_D=n|X_0=i)$ $=P(X_m\in D, 1\leqslant m\leqslant n-1; X_n\in D^c|X_0=i)\geqslant 0$，$n\geqslant 2$。由假设条件知：

$$\sum_{n=1}^{\infty}E_i^{(n)}=P(T_D<\infty|X_0=i)=1,\quad E_i\sum_{n=1}^{\infty}nE_i^{(n)}。$$

利用马氏性、齐次性，对任何 $i\in D$ 有

$$E_i^{(2)} = P(X_1 \in D, X_2 \in D^c | X_0 = i)$$
$$= \sum_{j\in D} p_{ij} P(X_2 \in D^c | X_1 = j) = \sum_{j\in D} p_{ij} E_j^{(1)}$$
$$E_i^{(n+1)} = \sum_{j\in D} P(X_1 = j; X_m \in D, 2 \leqslant m \leqslant n; X_{(n+1)} \in D^c | X_0 = i)$$
$$= \sum_{j\in D} p_{ij} P(X_m \in D, 2 \leqslant m \leqslant n; X_{n+1} \in D^c | X_1 = j)$$
$$= \sum_{j\in D} p_{ij} E_j^{(n)}, \qquad n \geqslant 2。$$

从而

$$(n+1)E_i^{(n+1)} = \sum_{j\in D} p_{ij} n E_j^{(n)} + E_i^{(n+1)}, \qquad n \geqslant 1,$$

由此应用引理6即得本定理。

回忆Ⅰ.(5)式，对任意 i，$j\in S$，定义 $\mu_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$，当 $f_{ij}=1$时，μ_{ij}就是$\sum$从 i 出发平均首次到达 j 的时间。$f_{jj}=1$时，μ_{jj}是 j 的平均回转时间。现在不论 $f_{ij}=1$，还是 $f_{ij}<1$，都有下面的结论：

定理 18　对任意的 $j\in S$，$\{\mu_{ij}, i\in S\}$是线性方程组

$$z_i = \sum_{k\neq j} p_{ik} z_k + f_{ij}, \qquad i \in S \tag{89}$$

的最小非负解。

证　由Ⅰ.(6)式 $f_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n)}$，$i$，$j\in S$，$n=1, 2, \cdots$，可得

$$(n+1)f_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\neq j} p_{ik}(n f_{kj}^{(n)}) + f_{ij}^{(n+1)}, \quad i, \quad j \in S, \quad n = 1,2,\cdots,$$

又已知Ⅰ.(5)式与Ⅱ.(8)式，那么从引理 6 即得要证的结论。

注　对于不可分齐次正常返马氏链，定理12实际上已给出了计算平均回转时间 μ_{jj}的一种代数方法。

例 2　设齐次马氏链 X 的状态空间 $S=\{0,1,\cdots\}$，一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{90}$$

其中$0<p<1$，$q=1-p$，显然状态 0 是吸收状态，对任何状态 $i,j\in S-\{0\}$，$i\Rightarrow 0$，但$0\not\Rightarrow i$，却 $i\Leftrightarrow j$。称此 X 作具有一个吸收壁“0”的随机徘徊。因 $p_{00}=1$，故0为正常返状态。又任何 $i\in S-\{0\}$是非本质的，由Ⅱ.定理 15 之推论 i 是非常返的。现试求首达概率 f_{i0}，$i\in S-\{0\}$。据定理14应求线性方程组

$$\begin{cases} z_1 = p z_2 + q, \\ z_i = p z_{i+1} + q z_{i-1}, \end{cases} \quad i = 2,3,\cdots。 \tag{91}$$

的最小非负解。式(91)可重写成

$$\begin{cases} p(z_2 - z_1) = q(z_1 - 1), \\ p(z_{i+1} - z_i) = q(z_i - z_{i-1}), \end{cases} \quad i = 2,3,\cdots。$$

由此可得

$$z_{i+1}-z_i=\frac{q}{p}(z_i-z_{i-1})=\cdots=\left(\frac{q}{p}\right)^i(z_1-1),\quad i=2,3,\cdots,$$

$$z_{i+1}-1=\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m(z_1-1),\quad i=0,1,\cdots。\tag{92}$$

如果 $p\leqslant q$，则 $\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m\xrightarrow[i\to\infty]{}\infty$，但作为最小非负解的$\{f_{i0},i=1,2,\cdots\}$是有界的，由式(92)只能是 $f_{10}=1$，从而 $f_{i0}=1$，$i=1,2,\cdots$。如果 $p>q$，因为我们只讨论非负解，所以由式(92)有

$$0\leqslant\lim_{i\to\infty}z_{i+1}=\lim_{i\to\infty}\left[1+\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m(z_1-1)\right]=1+\frac{z_1-1}{1-\dfrac{q}{p}},$$

由此及式(92)可得

$$z_1\geqslant\frac{q}{p},\quad z_{i+1}\geqslant1-\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m\left(1-\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)^{i+1},\quad i=0,1,\cdots。\tag{93}$$

不难直接验证 $\left\{W_i=\left(\frac{q}{p}\right)^i,i=1,2,\cdots\right\}$ 是方程组(91)的解，于是从式(93)知它就是最小非负解，即 $f_{i0}=\left(\frac{q}{p}\right)^i$，$i=1,2,\cdots$。这表示当 $p>\frac{1}{2}$时，系统$\sum$从任一状态$i(\geqslant1)$出发迟早要被状态0吸收的概率为$\left(\frac{q}{p}\right)^i$，又注意到 $S-\{0\}$中的状态都是非常返的，于是依Ⅱ.定理42，对任何 $k\geqslant1$，系统$\sum$以概率1迟早要离开$\{1,\cdots,k\}$。故$\sum$从$i(\geqslant1)$出发不被状态0吸收要向无穷远处跑去的概率为$1-\left(\frac{q}{p}\right)^i$。

现在在 $p\leqslant q$ 从而 $f_{i0}=1$，$i\geqslant1$的前提下来求平均首达时间 μ_{i0}，$i\geqslant1$，据定理18即求下列方程组的最小非负解：

$$\begin{cases}z_1=pz_2+1,\\ z_i=pz_{i+1}+qz_{i-1}+1,\end{cases}\quad i=2,3,\cdots。\tag{94}$$

可将式(94)改写成

$$\begin{cases}z_2-z_1=\dfrac{q}{p}z_1-\dfrac{1}{p},\\[2mm] z_{i+1}-z_i=\dfrac{q}{p}(z_i-z_{i-1})-\dfrac{1}{p},\end{cases}\qquad i=2,3,\cdots,$$

由此可得，当 $i=2,3,\cdots$时，

$$\begin{aligned}z_{i+1}-z_i&=\left(\frac{q}{p}\right)^2(z_{i-1}-z_{i-2})\left[\left(\frac{q}{p}\right)+1\right]\frac{1}{p}=\cdots\\&=\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}(z_2-z_1)-\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{i-2}+\cdots+\left(\frac{q}{p}\right)+1\right]\frac{1}{p}\\&=\left(\frac{q}{p}\right)^iz_1-\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}+\cdots+\left(\frac{q}{p}\right)+1\right]\frac{1}{p},\end{aligned}$$

$$z_{i+1}-z_1=\sum_{m=1}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^mz_1-\sum_{m=1}^{i}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m-1}+\cdots+1\right]\frac{1}{p},$$

$$z_{i+1}=\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^mz_1-\sum_{m=1}^{i}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m-1}+\cdots+1\right]\frac{1}{p}\quad。\tag{95}$$

如果 $p<q$，式(95)可写式

$$z_{i+1}=\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m z_1-\frac{1}{q-p}\left[\sum_{m=1}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m-i\right],\quad i=1,2,\cdots。$$

因为只讨论非负解：$z_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots$，将上式两端同除以 $\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m$，然后再令 $i\to\infty$ 可得

$$z_1\geqslant\frac{1}{q+p},\quad z_{i+1}\geqslant\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m\frac{1}{q-p}-\frac{1}{q-p}\left[\sum_{m=1}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^m-i\right]=\frac{i+1}{q-p},\quad i\geqslant 1。$$

不难直接验证 $\{W_i=\frac{i}{q-p},i\geqslant 1\}$ 是方程组(94)的解，从而也是最小非负解，故 $\mu_{i0}=\frac{i}{q-p}$，$i=1,2,\cdots$。如果 $p=q$，由式(95)应有

$$\mu_{i+1\,0}=(i+1)\mu_{10}-i(i+1),\quad i=2,3,\cdots。\tag{96}$$

倘若 μ_{10} 为有限数，从式(96)推知：对充分大的 i，μ_{i0} 将是负数，这与 μ_{10} 非负矛盾。于是只能是 $\mu_{10}=\infty$，再由式(96)、(94)、知 $\mu_{i0}=\infty$，$i=1,2,\cdots$。

在上一段中已经阐明首达概率 $\{f_{ij}\}$ 与平均首达时间 $\{\mu_{ij}\}$ 是某种线性方程组的解，然而状态的常返性或正常返性是用首达概率 f_{ii} 与平均回转时间 μ_{ii} 来定义的，因此很自然地会想到应该直接去探讨线性方程组的解与常返性之间的联系，从而导致了下面的方法。

3. 常返性的代数判别法

先给出一个在建立判别法时要用到的结论。

定理19　不可分齐次马氏链 X 的所有状态都是常返的充要条件是存在状态 $i(\in S)$，使得对一切 $j\in S-\{i\}$ 都有 $f_{ji}=1$。

证　必要性。因 X 不可分，每个状态都是常返的，由 Ⅱ. 定理15知 $f_{ij}=f_{ji}=1$，$i,j\in S$。

再证充分性。由定理13及假设条件，对任何状态 i 有

$$f_{ii}=\sum_{j\neq i}p_{ij}f_{ji}+p_{ii}=\sum_{j\in S}p_{ij}=1,$$

依定义 i 是常返的，又因 X 是不可分的，所以 S 中的每个状态都是常返的，证毕。

定理 20　不可分齐次马氏链 X 的所有状态都是常返的充要条件是存在状态 $j\in S$，使线性方程组

$$z_i=\sum_{k\neq j}p_{ik}z_k,\qquad i\in S-\{j\}\tag{97}$$

的有界解全为零。

证　为证本定理，可以构造一个新的齐次马氏链 Y，它的状态空间与 X 的相同为 S，又 Y 的一步转移概率 $\bar{p}_{ik}$ 与 X 的相比，对 $i\in S-\{j\}$，$k\in S$，$\bar{p}_{ik}=p_{ik}$，而 $\bar{p}_{jj}=1$，$\bar{p}_{ji}=0$。即在新链 Y 中，状态 j 改成了吸收状态，其它都保持不变，于是从状态 $i\in S-\{j\}$ 出发，直至首次到达 j 的概率，新链 Y 的 $\bar{f}_{ij}$ 与原链 X 的 f_{ij} 应当相同，只是在新链 Y 中 $\bar{f}_{ij}$ 变成从 i 出发被 j 吸收的概率。对 $i\in S-\{j\}$，在原链 X 中，因 X 不可分，故 $i\Leftrightarrow j$，然而在新链 Y 中，$i\Rightarrow j$，$j\not\Rightarrow i$，所以 i 是非本质的，从而是非常返的，即在新链 Y 中只有单个状态 j 构成常返状态集 $\{j\}$，而 $S-\{j\}$ 是 Y 的所有非常返状态集记为 $\underline{D}$，又记 $\bar{a}_i=1-\bar{f}_{ij}$，$i\in\underline{D}$，此 $\bar{a}_i$ 是相对于 Y 的从 i 出发永远留在非常返状态集 $\underline{D}$ 中的概率。于是由定理15，方程组

$$z_i=\sum_{k\in D}\bar{p}_{ik}z_k,\quad i\in D,\text{即 } z_i=\sum_{k\neq j}p_{ik}z_k,i\in S-\{j\}$$

的有界解全为零的充要条件是 $\bar{a}_i=0$，$i\in \underline{D}$，即 $\bar{f}_{ij}=1$，，$i\in \underline{D}$，也就是 $f_{ij}=1$，，$i\in S-\{j\}$。再依定理19知这等价于 X 的所有状态都是常返的，证完。

注 考察定理20的证明，两个马氏链 X 与 Y 从状态 i 出发直至到达状态 j 为止的运动情况完全相同，仅在到达 j 之后才可能有所不同，因此 $f_{ij}=\bar{f}_{ij}$，而且状态 j 总可以被看作是吸收状态。这就提供了一种利用已知的一些马氏链的首达概率之结果去推算未知的马氏链的首达概率的极有用的方法。

定理 21 不可分齐次马氏链 X 的所有状态都是常返的充要条件是存在状态 $j\in S$，使线性方程组

$$z_i=\sum_{k\in S}p_{ik}z_k,\quad i\in S-\{j\} \tag{98}$$

的有界解必为常数。

证 如果方程组(98)有非常数的有界解 $\{u_i,i\in S\}$，则 $\{w_i\triangleq u_i-u_j,i\in S-\{j\}\}$ 是非零有界数列，而且对任何 $i\in S-\{j\}$，

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq j}p_{ik}w_k&=\sum_{k\neq j}p_{ik}u_k-(1-p_{ij})u_j\\&=\sum_{k\in S}p_{ik}u_k-u_j=u_i-u_j=w_i,\end{aligned}$$

故 $\{w_i,i\in S-\{j\}\}$ 是方程组(97)的非零有界解。

反之，如果方程组(97)有非零有界解 $\{w_i,i\in S-\{j\}\}$，令 $u_i=\begin{cases}w_i, & i\neq j,\\0, & i=j,\end{cases}$ 那么 $\{u_i,i\in S\}$ 是非常数有界数列，而且对任何 $i\in S-\{j\}$，

$$\sum_{k\in S}p_{ik}u_k=\sum_{k\neq j}p_{ik}w_k=w_i=u_i,$$

即 $\{u_i,i\in S\}$ 是方程组(98)的非常数有界解。

以上证明了存在 $j\in S$ 使方程组(98)的有界解必为常数等价于存在 $j\in S$ 使方程组(97)的有界解全为零。再由定理20，结论得证。

定理 22 称线性不等式方程组

$$z_i\geqslant\sum_{k\in S}p_{ik}z_k,\quad i\in S \tag{99}$$

的非负解为马氏链的过份函数。不可分齐次马氏链 X 的所有状态皆为常返的充要条件是其过份函数必为常数。

证 先证必要性，设 $\{u_i,i\in S\}$ 是 X 的过份函数，对 $u_i=0$，$i\in S$ 的平凡情形不予论述。现设有状态 j 使 $u_j>0$，那么对任何 $i\in S$，应用 C-K 方程与傅比尼定理可得

$$\begin{aligned}u_i&\geqslant\sum_{r\in S}p_{ir}u_r\geqslant\sum_{r\in S}p_{ir}\Big(\sum_{k\in S}p_{rk}u_k\Big)\\&=\sum_{k\in S}\Big(\sum_{r\in S}p_{ir}p_{rk}\Big)u_k=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(2)}u_k,\quad i\in S,\end{aligned}$$

再由归纳法便有

$$u_i\geqslant\sum_{k\in S}p_{ik}^{(n)}u_k,\quad n=1,2,\cdots,\quad i\in S, \tag{100}$$

因为 X 不可分，所以对任何 $i\in S$，$i\Rightarrow j$，从而必有某正整数 n，使 $p_{ij}^{(n)}>0$，因此从式(100)即得

$$u_i\geqslant p_{ij}^{(n)}u_j>0,\quad i\in S。 \tag{101}$$

记 $w_i \triangleq \frac{u_i}{u_j}$，$i\in S$，由过份函数之定义及 $u_j>0$，

则

$$w_i \geqslant \sum_{k\in S} p_{ik}w_k = \sum_{k\neq j} p_{ik}w_k + p_{ij} = \sum_{k\neq j} p_{ik}w_k + f_{ij}^{(1)}。 \tag{102}$$

重复应用式(102)作叠代，

$$\begin{aligned} w_i &\geqslant \sum_{k\neq j} p_{ik}\Big(\sum_{r\neq j} p_{kr}w_r + p_{kj}\Big) + p_{ij} \\ &= \sum_{k,r\neq j} p_{ik}p_{kr}w_r + \sum_{k\neq j} p_{ik}p_{kj} + p_{ij} \\ &= \sum_{k,r\neq j} p_{ik}p_{kr}w_r + f_{ij}^{(2)} + f_{ij}^{(1)} \end{aligned}$$

反复叠代并应用归纳法得

$$w_i \geqslant f_{ij}^{(n)} + \cdots + f_{ij}^{(2)} + f_{ij}^{(1)},\quad i\in S,\quad n=1,2,\cdots。$$

令 $n\to\infty$，便有 $w_i\geqslant f_{ij}$，再由假设条件与Ⅱ．定理15知 $w_i\geqslant 1$，从而 $u_i\geqslant u_j$，$i\in S$。利用式(101)及上面的论证便知 $u_j\geqslant u_i$，$i\in S$，故 $u_i=u_j$，$i\in S$，过份函数为常数。

再证充分性。任意取定 $j\in S$，令 $u_i\triangleq\begin{cases} f_{ij}, & i\neq j, \\ 1, & i=j。\end{cases}$ 注意到定理13中的式(74)，则对于$i\neq j$有

$$u_i = f_{ij} = \sum_{k\neq j} p_{ik}f_{kj} + p_{ij} = \sum_{k\in S} p_{ik}f_{kj}. \tag{103}$$

对 $i=j$ 有

$$u_j = 1 \geqslant f_{jj} = \sum_{k\neq j} p_{jk}f_{kj} + p_{jj} = \sum_{k\in S} p_{jk}u_k,$$

因此$\{u_j, j\in S\}$是 X 的过份函数，由假设必为常数。于是依式(103)，当 $i\neq j$ 时，$f_{ij}=1$，据定理19，X 的所有状态都有常返的，定理证完。

注　定理 20、定理 21、定理 22都给出了判别常返性的充要条件，但在表现形式上略有不同，使用时，应针对不同场合适当选择方便的形式。

下面将给出常返性的某些充分条件或必要条件。

定理23　设 X 为状态空间 $S=\{0,1,\cdots\}$ 的不可分齐次马氏链，并满足下列条件：存在下方有界的数列$\{y_i, i\in S\}$及某个状态 j，使得 $i\in S-\{j\}$时，

$$\sum_{k\in S} p_{ik}y_k \leqslant y_i, \tag{104}$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$，则 X 的所有状态是常返的。

证　构造新齐次马氏链 Y，其状态空间也为 S，其转移概率为

$$\bar{p}_{ik} \triangleq \begin{cases} p_{ik}, & i\neq j, \\ \delta_{jk}, & i=j, \end{cases} \quad i,k\in S,$$

对 Y 而言 j 改成吸收状态。因式(104)仍有

$$\sum_{k\in S} \bar{p}_{ik}y_k \leqslant y_i,\quad i\in S, \tag{105}$$

不妨可认为 $y_i\geqslant 0$，$i\in S$，否则只需用 $y_i-\inf\limits_n y_n$ ($\geqslant 0$) 代替 y_i，$i\in S$，式(105)仍成立。反复使用式(105)，由 C-K 方程及归纳法得

$$\sum_{k\in S} \bar{p}_{ik}^{(m)}y_k \leqslant y_i,\quad i\in S,\quad m=1,2,\cdots。$$

记 $u_n=\inf\limits_{k\geq n} y_k$，由假设知$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$，故存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$u_n>0$，并且

$$y_i \geqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \bar{p}_{ik}^{(m)} y_k \geqslant u_N \sum_{k=N+1}^{\infty} \bar{p}_{ik}^{(m)}, \quad i \in S, \quad m=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{k=0}^{N} \bar{p}_{ik}^{(m)} = 1-\sum_{k=N+1}^{\infty} \bar{p}_{ik}^{(m)} \geqslant 1-\frac{y_i}{u_N} \quad i \in S, \quad m=1,2,\cdots,$$

从而，
$$\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\bar{p}_{ik}^{(m)}\right)\geqslant 1-\frac{y_i}{u_N}, \quad i\in S, \quad n=1,2,\cdots,$$

由定理6知存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\bar{p}_{ik}^{(m)}$，记作 $\bar{\pi}_{ik}$，i，$k\in S$。于是在前式中先令 $n\to\infty$，再令 $N\to\infty$，便得$\sum\limits_{k\in S}\bar{\pi}_{ik}\geqslant 1$，$i\in S$，另一方面，由法都定理，对任何 $i\in S$，

$$\sum_{k\in S}\bar{\pi}_{ik} = \sum_{k\in S}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\bar{p}_{ik}^{(m)}\right)\leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k\in S}\bar{p}_{ik}^{(m)}\right)=1,$$

故$\sum\limits_{k\in S}\bar{\pi}_{ik}=1$，$i\in S$。

因为 X 不可分以及 Y 的构造，对 Y 而言，除 j 为吸收状态外，$S-\{j\}$中每个状态都是非常返的，于是 $\bar{\pi}_{ik}=0$，$k\in S-\{j\}$，$i\in S$，从而$\frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{\mu}_{jj}}=\bar{\pi}_{ij}=1$，$\bar{f}_{ij}=1$，$i\in S$。而当 $i\in S-\{j\}$ 时，$f_{ij}=\bar{f}_{ij}=1$，由定理 19 即可断言 X 的所有状态都是常返的。

定理 24 设不可分齐次马氏链 X 的每个状态都是常返的，则线性方程组

$$z_i = \sum_{k\in S} z_k p_{ki}, \quad i \in S \tag{106}$$

有非零非负解$\{w_i,i\in S\}$，而且

$$w_i = \lambda g_{ji}, \quad i \in S, \tag{107}$$

其中 j 为任意取定的一个状态，λ 是一非零常数。

证 任意取定状态 j，由 Ⅱ.(9)式、Ⅱ.(29)式及引理4的证明即知$\{w_i=g_{ji},i\in S\}$是线性方程组

$$z_i = \sum_{k\neq j} z_k p_{ki} + p_{ji}, \quad i \in S$$

的最小非负解。注意到 $w_j=g_{jj}=f_{jj}=1$，便知$\{w_i=g_{ji},i\in S\}$是方程组(106)的非零非负解。

如果$\{w_i,i\in S\}$已是(106)的非零非负解，用 C-K 方程与归纳法，有

$$w_i = \sum_{k\in S} w_k p_{ki}^{(n)}, \quad i \in S, \quad n=1,2,\cdots,$$

并且必有某 $r\in S$ 使 $w_r>0$。又因 X 不可分，所以对每个 $i\in S$，必有正整数 n_i，使 $p_{ri}^{(n_i)}>0$，从而，$w_i=\sum\limits_{k\in S} w_k p_{ki}^{(n_i)}\geqslant w_r p_{ri}^{(n_i)}>0$，既然$\{w_i,i\in S\}$是非负解，那么 $w_i>0$，$i\in S$。现在令

$$q_{ij} = \frac{w_j}{w_i} p_{ji}, \qquad i,j \in S,$$

显然 $q_{ij}\geqslant 0$，i，$j\in S$，且

$$\sum_{j\in S} q_{ij} = \frac{1}{w_i}\sum_{j\in S} w_j p_{ji} = \frac{1}{w_i} w_i = 1, \quad i \in S,$$

因此$[q_{ij}]$可作为一齐次马氏链 Y 的转移概率矩阵。利用 C-K 方程，

$$q_{ij}^{(2)} = \sum_{k\in S} q_{ik} q_{kj} = \sum_{k\in S} \frac{w_k}{w_i} p_{ki} \frac{w_j}{w_k} p_{jk} = \frac{w_j}{w_i}\sum_{k\in S} p_{jk} p_{ki} = \frac{w_j}{w_i} p_{ji}^{(2)},$$

应用归纳法，可得 Y 的任意 n 步转移概率

$$q_{ij}^{(n)}=\frac{w_j}{w_i}p_{ji}^{(n)},\quad i,j\in S,\quad n=1,2,\cdots \tag{108}$$

由此及 X 不可分知 Y 也是不可分的。并且从式(108) $\sum_{n=1}^{\infty}q_{ii}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$，故 Y 的所有状态都是常返的。再依据定理8中的式(24)、(26)知对任何 i，$j\in S$，

$$1=\lim_{L\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{L}q_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L}q_{jj}^{(n)}}=\lim_{L\to\infty}\frac{w_j}{w_i}\frac{\sum_{n=1}^{L}p_{ji}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{L}p_{jj}^{(n)}}=\frac{w_j}{w_i}g_{ji}。$$

故

$$w_i=w_jg_{ji},\quad i,j\in S。\tag{109}$$

任意取定状态 j，同时取 $\lambda=w_j$，即得式(107)。

推论 设不可分齐次马氏链的状态空间 S 中每个状态都是常返的，则

$$g_{kj}g_{ji}=g_{ki},\quad i,j\in S \tag{110}$$

证 在定理 24 的证明中，已证 $\{w_i=g_{ki},i\in S\}$ 是方程组(106)的非零非负解，将它代入式(109)即得式(110)。

定理 25 设不可分齐次马氏链 X 的所有状态都是常返的，则线性不等式方程组

$$z_i\geqslant\sum_{k\in S}z_kp_{ki},\quad i\in S \tag{111}$$

的非零非负解 $\{w_i,i\in S\}$ 也具有式(107)的形式。

证 任意取定一状态 j，令

$$q_{ik}=\frac{g_{jk}}{g_{ji}}p_{ki},\quad i,j\in S。$$

由定理24的证明知，可构造一齐次马氏链 Y，它以 $[q_{ik}]$ 为一步转移概率矩阵，且 Y 是不可分的，Y 的每个状态是常返的。又因

$$\sum_{k\in S}q_{ik}\frac{w_k}{g_{jk}}=\frac{1}{g_{ji}}\sum_{k\in S}w_kp_{ki}\leqslant\frac{w_i}{g_{ji}},\quad i\in S,$$

由此可见 $\left\{\frac{w_i}{g_{ji}},i\in S\right\}$ 是 Y 的过份函数。据定理 22，此过份函数必为常数，即 $\frac{w_i}{g_{ji}}=\lambda$，$i\in S$，证完。

最后讨论正常返性判别法，其实定理12已经给出了识别正常返性的一种代数方法。此外，再介绍其它几种有用的判别方法。

定理 26 不可分齐次马氏链 X 的每个状态 $i(\in S)$ 都是正常返的充要条件是线性不等式方程组

$$z_i\geqslant\sum_{k\in S}z_kp_{ki},\quad i\in S \tag{112}$$

的非负解均为收敛解。

证 对任意的状态 $j\in S$，任何正整数 n，由 Ⅱ.(32)式

$$\sum_{i\in S}g_{ji}^{(n)}=(1-f_{jj})+\sum_{m=n}^{\infty}f_{jj}^{(m)},$$

及傅比尼定理可得

$$\sum_{i\in S}g_{ji}=\sum_{i\in S}\sum_{n=1}^{\infty}g_{ji}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-f_{jj})+\sum_{m=n}^{\infty}f_{jj}^{(m)}\right]。\tag{113}$$

由此可见，如果 j 是非常返的，则 $f_{jj}<1$，从而 $\sum_{i\in S}g_{ji}=\infty$；如果 j 是常返的，则 $f_{jj}=1$，从而

$$\sum_{i\in S}g_{ji}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}f_{jj}^{(m)}=\sum_{m=1}^{\infty}mf_{jj}^{(m)}=\mu_{jj}。\tag{114}$$

现在先证必要性。依定理25，线性不等式方程组(112)的非负解$\{w_i,\ i\in S\}$具有式(107)的形式，再由式(114)及 j 是正常返的，即得

$$\sum_{i\in S}w_i=\lambda\sum_{i\in S}g_{ji}=\lambda\mu_{jj}<\infty。$$

再证充分性。任意取定一状态 $j(\in S)$，回忆定理24的证明，已证 $\{w_i=g_{ji},\ i\in S\}$ 是线性方程组：$z_i=\sum_{k\neq j}z_kp_{ki}+p_{ji}$，$i\in S$ 的非负解，而 $w_j=g_{jj}=f_{jj}\leqslant 1$，因此有

$$w_i=\sum_{k\neq j}w_kp_{ki}+p_{ji}\geqslant\sum_{k\in S}w_kp_{ki},\quad i\in S,$$

即$\{w_i=g_{ji}\ ,i\in S\}$是(112)的非负解，依假设是收敛解，故 $\sum_{i\in S}g_{ji}=\sum_{i\in S}w_i<\infty$，由前面已证的事实 j 必为常返的，再由式(114)，$\mu_{jj}=\sum_{i\in S}g_{ji}<\infty$，故 j 是正常返的，既然 X 不可分，那么一切状态都是正常返的，定理证完。

定理 27 不可分齐次马氏链 X 的每个状态 $i(\in S)$都是正常返的充要条件是存在非负数列$\{w_i,\ i\in S\}$及一个状态 j，使得

$$\sum_{k\in S}p_{ik}w_k\leqslant w_i-1,\quad i\in S-\{j\},\tag{115}$$

$$\sum_{k\in S}p_{jk}w_k<\infty。\tag{116}$$

证 证必要性。在 X 不可分，每个状态都是正常返的假设下，先证对任何状态 $i,\ j\in S$，$i\neq j$，有 $\mu_{ij}<\infty$。由于 X 不可分，故 $j\Rightarrow i$，从而必存在某正整数 $n(\geqslant 2)$及状态 $i_1,\cdots,i_{n-1},i_m\neq j,m=1,\cdots,n-1$，使得 $p_{ji_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i}>0$。又根据定理 18 及常返性得

$$\mu_{jj}=\sum_{k\neq j}p_{jk}\mu_{kj}+1。$$

既然 j 是正常返的，故 $\mu_{jj}<\infty$，又已知 $p_{ji_1}>0$，$i_1\neq j$，那么从上式导致必 $\mu_{i_1j}<\infty$。完全类似地有

$$\mu_{i_1j}=\sum_{k\neq j}p_{i_1k}\mu_{kj}+1\quad,$$

$p_{i_1i_2}>0$，$i_2\neq j$，由此必得 $\mu_{i_2j}<\infty$。依次类推，即可证得 $\mu_{ij}<\infty$。

现在任意取定一状态 j，令

$$w_i=\begin{cases}\mu_{ij}, & i\in S-\{j\}\\ 0, & i=j,\end{cases}\tag{117}$$

仍由定理18及式(117)，当 $i\in S-\{j\}$时，有

$$\sum_{k\in S}p_{ik}w_k=\sum_{k\neq j}p_{ik}\mu_{kj}=\mu_{ij}-1=w_i-1,$$

即式(115)成立。另一方面式(116)也成立，事实上，

$$\sum_{k\in S}p_{jk}w_k=\sum_{K\neq j}p_{jk}\mu_{kj}=\mu_{jj}-1<\infty。$$

再证充分性。由式(116)，记 $\delta=\sum_{k\in S}p_{jk}w_k<\infty$。又令

$$w_i^{(1)} = w_i, \quad w_i^{(n+1)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} w_k, \quad n = 1,2,\cdots, \quad i \in S$$

由式(116)、(115)、C-K 方程、傅比尼定理，并用归纳法可得

$$w_j^{(2)} = \delta,\ w_i^{(2)} = \sum_{k\in S} p_{ik} w_k \leqslant w_i - 1,\ i \in S - \{j\}$$

$$\begin{aligned} w_i^{(n+2)} &= \sum_{k\in S}\Big(\sum_{r\in S} p_{ir}^{(n)} p_{rk}\Big) w_k = \sum_{r\in S} p_{ir}^{(n)} w_r^{(2)} \\ &\leqslant \delta p_{ij}^{(n)} + \sum_{r\neq j} p_{ir}^{(n)}(w_r - 1) \\ &= (1+\delta) p_{ij}^{(n)} - 1 + \sum_{r\neq j} p_{ir}^{(n)} w_r \\ &\leqslant (1+\delta) p_{ij}^{(n)} - 1 + w_i^{(n+1)}, \\ &\quad i \in S, \quad n = 1,2,\cdots。 \end{aligned} \tag{118}$$

由式(118)，再用归纳法便知：$w_i^{(n)}<\infty$，$i\in S, n=1,2,\cdots$，且

$$0 \leqslant w_i^{(n+2)} \leqslant (1+\delta)\sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} - n + w_i^{(2)}$$

故

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} \geqslant \frac{1}{1+\delta}\left(1 - \frac{w_i^{(2)}}{n}\right)。$$

由此可见$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} \geqslant \frac{1}{1+\delta} > 0$，$i\in S$，据定理 6 状态 j 必为正常返的，又因 X 是不可分的，所以每个状态都是正常返的，定理证完。

定理 28　设 X 是状态空间为 S 的不可分齐次马氏链，且每个状态都是正常返的，则

$$g_{ij} = \frac{\mu_{ii}}{\mu_{jj}}, \quad i,\ j \in S。 \tag{119}$$

证　由定理 10 知 X 有唯一的平稳分布$\{\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}, j\in S\}$。依平稳分布的定义，$\{\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}, j\in S\}$是线性方程组(106)的非零非负解，于是从定理24得知 $\pi_j = \lambda g_{ij}$，$j\in S$，其中 i 是任意取定的一个状态，λ 是一非零常数，特别地，$\pi_i = \lambda g_{ii} = \lambda f_{ii} = \lambda$，从而 $g_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} = \frac{\mu_{ii}}{\mu_{jj}}$，定理证完。

例 3　考察例1中所给出的齐次马氏链 X，即此 X 作具有一个反射壁"0"的随机徘徊。例 1 已指出 X 是不可分的，那么试问 X 的每个状态是否都是常返的？为此应用定理21，讨论线性方程组(98)，在这里便是下列方程组：

$$z_i = q_i z_{i-1} + r_i z_i + p_i z_{i+1}, \qquad i = 1,2,\cdots, \tag{120}$$

因为$1-r_i = q_i + p_i$，$i=1,2,\cdots$，故方程组(120)可改写成：

$$p_i(z_{i+1} - z_i) = q_i(z_i - z_{i-1}), \quad i = 1,2,\cdots,$$

从而对 $i=1,2,\cdots$有

$$z_{i+1} - z_i = \frac{q_i}{p_i}(z_i - z_{i-1}) = \cdots = \frac{q_i q_{i-1}\cdots q_1}{p_i p_{i-1}\cdots p_1}(z_1 - z_0), \tag{121}$$

反复应用式(121)即得下式

$$z_{i+1} = z_1 + \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k}\right)(z_1 - z_0), \quad i = 1,2,\cdots, \tag{122}$$

如果$\{w_i, i=0,1,\cdots\}$是方程组(120)的有界解，那么它必满足式(121)、(122)，如果$\{w_i, i=0,1,\cdots\}$不是常数解，则必 $w_1 \neq w_0$，事实上，倘若 $w_1 = w_0$，由式(121)即得 $w_{i+1} = w_i = \cdots = w_1 =$

$w_0, i=1,2,\cdots$，导致矛盾。而在 $w_1 \neq w_0$ 的前提条件下，必有 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} < \infty$，否则由式(122)，$|w_{i+1}|$ 将随 i 的增大可任意大，这与 $\{w_i, i=0,1,\cdots\}$ 是有界解矛盾。故 $\{w_i, i=0,1,\cdots\}$ 为方程组(120)的非常数的有界解的充要条件是 $w_1 \neq w_0$，且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} < \infty$。由此可见，$X$ 的所有状态都是常返的充要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} = \infty$。特别地，在 $p_i = p$，$q_i = q$，$i=1,2,\cdots$ 时，若 $p \leqslant q$，则 X 的一切状态是常返的，若 $p > q$，则 X 的一切状态是非常返的。

由定理12，例 1 实际上已给出了 X 的一切状态为正常返的充要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_1 \cdots p_{k-1}}{q_1 \cdots q_k} < \infty$。特别地，当 $p_i = p$，$q_i = q$，$i=1,2,\cdots$ 时，X 的一切状态为正常返的充要条件是 $p < q$。

第四章　有限马尔科夫链

尽管前面三章所论证的一般结论对于有限齐次马氏链都是适用的，但是在因状态个数有限而变得简单的情形下，会有一些更精细的有别于一般的特殊结果，将它们集中在一起专门加以介绍，不仅在理论上可与无限情形作一对比，加深对一般结论的理解，而且也便于具体使用，特别是在许多实际问题中，经常会遇到状态个数有限但数量又很大的情形，对此也应该去探寻切实可行的处理方法，以上便是本章要论述的内容。在本章中，若无特别声明，X 表示有限齐次马氏链，状态空间 S 是有限集。

§1　有限马尔科夫链的特异性质

定理 1　有限齐次马氏链的状态空间 S 中，不可能全是非常返状态，即必有常返状态。

证　倘若 S 中的每个状态都是非常返的，依Ⅱ．定理 1 便有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$，$i,j\in S$。既然 S 是有限集，这将导致矛盾：

$$1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in S}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0。$$

定理得证。

在第三章中已经指出：对于可列多个状态的齐次马氏链，它的所有非常返状态构成的集 D 可以是闭集也可以不是闭集。有限情形却与此不同。有下面的定理。

定理 2　对有限齐次马氏链，由一切非常返状态构成的集 D 一定不是闭集。

证　用反证法，倘若 D 是闭集，则由Ⅱ．定理 31 之注可产生一个状态空间为 D 不含常返状态的有限子马氏链，这与定理 1 矛盾，证完。

注　或直接由Ⅱ．定理 42 之(iii)。即得定理 2。

由定理 1 与定理 2 即得：

推论　不可分有限齐次马氏链的每个状态必定都是正常返的。

定理 3　有限齐次马氏链的状态空间 S 中不可能含有零状态。

证　倘若有零状态 i，据Ⅱ．定理 36 即 S 的唯一分解定理知，此 i 必属于某个全由常返状态构成的不可分闭集，不妨记为 C_1，又依Ⅱ．定理 34，C_1 中每个状态都是零常返的，于是由Ⅱ．定理 2 得 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$，$j\in C_1$，注意到 C_1 是有限闭集便导致矛盾：

$$1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in C_1} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in C_1}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0,$$

故 S 中无零状态。

在第二章中已指出：一般说来，常返状态必是本质状态，逆命题未必成立。但是当 S 是有限集时，逆命题也成立。

定理 4 对有限齐次马氏链，如果状态 i 是本质的，则 i 必是常返的。

证 已知 i 是本质的，取闭包 $\overline{\{i\}}$，它是含有 i 的不可分闭集，当然有限。由 Ⅱ．定理 31 之注及本章的定理 1，$\overline{\{i\}}$ 必含有常返状态，再依 Ⅱ．定理 34 知 i 必是常返的。

注 或由 Ⅱ．定理 42 之(ii)推出定理 4。

定理 5 有限齐次马氏链从任一非本质状态（由 Ⅱ．定理 15 之推论知即为非常返状态）出发以概率 1 必定要达到常返状态，即 Ⅱ．(81) 式定义的 $\alpha_i = 0$，$i \in D$。

证 根据 Ⅱ．定理 15，自非常返状态 i 出发永远不离开所有非常返状态构成的集 D 的概率 $\alpha_i = 0, i \in D$ 的充要条件是齐次线性方程组：

$$z_i = \sum_{j \in D} p_{ij} z_j, \qquad i \in D \tag{1}$$

无非零的有界解。

倘若方程组(1)有非零的有界解 $\{w_i, i \in D\}$，因式(1)是齐次的又 D 是有限集，不妨可设 $M = \max\{w_i, i \in D\} > 0$，且有 $i_0 (\in D)$ 使 $w_{i_0} = M$，于是从式(1)得

$$0 < M = w_{i_0} = \sum_{j \in D} p_{i_0 j} w_j \leqslant \Big(\sum_{j \in D} p_{i_0 j} \Big) M。$$

由此可见 $\sum_{j \in D} p_{i_0 j} \geqslant 1$，从而 $\sum_{j \in D} p_{i_0 j} = 1$。这表明 D 是闭集，与定理 2 之结论矛盾。所以式(1)无非零的有界解，故 $\alpha_i = 0, i \in D$，定理证完。

定理 6 设 j 是有限齐次马氏链 X 的常返状态，记 $C(j)$ 是含 j 的不可分闭集，即 $C(j) = \{j\} \cup \{i: i \in S, j \Rightarrow i\}$，则线性方程组：

$$z_i = \sum_{k \in D} p_{ik} z_k + \sum_{k \in C(j)} p_{ik}, \qquad i \in D \tag{2}$$

有唯一的有界解 $\{f_{iC(j)}, i \in D\}$，其中 $f_{iC(j)}$ 由 Ⅱ．式(84)所定义。并且对任何 $r \in C(j)$ 都有

$$f_{ir} = f_{iC(j)}, \qquad i \in D。\tag{3}$$

证 由定理 5，对有限齐次马氏链，$\alpha_i = 0, i \in D$，于是依 Ⅱ．定理 16 知 $\{f_{iC(j)}, i \in D\}$ 是方程组(2)的唯一有界解。

因为 j 是常返状态，所以也是本质的，故

$$S(j) \triangleq (j) \cup \{i: i \in S, j \Leftrightarrow i\} = \{j\} \cup \{i: i \in S, j \Rightarrow i\} = C(j)。$$

由此可见方程组(2)等同于下面的线性方程组：

$$z_i = \sum_{k \in D} p_{ik} z_k + \sum_{k \in S(j)} p_{ik}, \qquad i \in D。\tag{4}$$

式(4)即为 Ⅱ．(75)式，根据 Ⅱ．定理 14，$\{f_{ij}, i \in D\}$ 是(4)的最小非负有界解，由前面已证的唯一性便有

$$f_{ij} = f_{iC(j)}, \qquad i \in D。$$

最后再利用 Ⅱ．定理 14 之推论便得式(3)。证毕。

现在用下面几个定理来阐明有限情形下转移概率的稳定性能。着重论述有限马氏链的遍历性。

定理 7 (i) 有限齐次马氏链为遍历的充要条件是恰好存在一个正常返状态的不可分闭子集，而且所有状态都是非周期的。

(ii) 有限齐次马氏链的平稳分布恒存在。

证 先证(i)。由定理 1 与定理 3 有限齐次马氏链必有常返状态，而且不可能是零状态，即必为正常返状态，再由Ⅱ. 定理 3 的推论 2 便知所给条件是必要的。反之，利用Ⅱ. 定理 1 与Ⅱ. 定理 3 的推论 1 即可证实该条件也是充分的。(i) 得证。

再证 (ii)，由定理 1 与定理 3 知有限齐次马氏链必有正常返状态。依据Ⅱ. 定理 11 之推论，因 $H \neq \phi$ 而断言必存在平稳分布。

定理 8 对状态空间为 S 的有限齐次马氏链 X，如果存在正整数 m 使其转移概率矩阵 P 的 m 次幂 $P^m = [p_{ij}^{(m)}]$ 中的每个元素皆大于 0，则

(i) 对每个 $i,j \in S$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 都存在，且与 i 无关，记作 $\pi_j \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, j \in S$。

(ii) $\pi_j = \dfrac{1}{\mu_{jj}}, \quad \pi_j > 0, \quad j \in S; \quad \sum\limits_{j\in S}\pi_j = 1$。 (6)

证 由Ⅱ. 定理 4 即得 (i)，并且知 X 是不可分的，既然 S 有限，由定理 1 与定理 2 之推论 X 的每个状态都是正常返的，再由Ⅱ. 定理 4 知，每个状态都是非周期的，而且 $\pi_j = \dfrac{1}{\mu_{jj}}, j \in S$，

$$\sum_{j\in S}\pi_j = \sum_{j\in S}\frac{1}{\mu_{jj}} = \sum_{j\in S}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1, i \in S,$$

定理得证。

推论 不可分的有限齐次马氏链 X 具有遍历性的充要条件是存在正整数 m，使得对一切 $i,j \in S$ 都有 $p_{ij}^{(m)} > 0$。

证 充分性已被定理 8 证实。现证必要性，因为 X 有限不可分，所以每个状态 $j(\in S)$ 都是正常返的，$\mu_{jj} < \infty, j \in S$。依假设 X 具有遍历性，即存在不依赖于 i 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$，$i,j \in S$。于是根据Ⅱ. 定理 3 之推论，每个状态 $j(\in S)$ 必是非周期的，而且 $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_{jj}} > 0$，$i, j \in S$，既然 S 是有限集，必可找到正整数 m，当 $n \geqslant m$ 时，都有 $p_{ij}^{(n)} > 0$，$i, j \in S$，推论得证。

为了给出使随机矩阵 P 具有遍历性的充分条件并估计收敛速度，需做以下准备工作。

设 $A = [a_{ij}]$ 是 NXN 实矩阵，N 是一正整数。令 $m_j(A) \triangleq \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{a_{ij}\}, M_j(A) \triangleq \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{a_{ij}\}$，$1 \leqslant j \leqslant N$。对任何实数 a、b，记 $I(a,b) \triangleq \min\{a,b\}$，又记

$$\delta_{i_1 i_2}(A) \triangleq \sum_{j=1}^{N} I(a_{i_1 j}, a_{i_2 j}), \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant N, \tag{7}$$

$$\delta(A) \triangleq \min_{1\leqslant i_1 < i_2 \leqslant N}\{\delta_{i_1 i_2}(A)\}, \tag{8}$$

从这些记号的含义显然可得下列事实：

(1) $\delta(A) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{N} m_j(A)$ (9)

(2) 如果 A 中有某 $L(1 \leqslant L \leqslant N)$ 个列的诸元素 a_{ij} 均满足：$m_j(A) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{a_{ij}\} \geqslant \delta > 0$，$j$ 可等于此 L 个列的任一序号，则

$$\delta(A) \geqslant L\delta \text{。} \tag{10}$$

引理 1 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $N \times N$ 随机矩阵，$B = [b_{ij}]$ 是 $N \times N$ 非负元素矩阵，置矩阵积

$AB = C = [c_{ij}]$，则对任何一列第 j 列($1 \leqslant j \leqslant N$)和任何两行第 i_1, i_2 行($1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant N$)有

$$|c_{i_1 j} - c_{i_2 j}| \leqslant [1 - \delta_{i_1 i_2}(A)][M_j(B) - m_j(B)], \tag{11}$$

从而

$$|M_j(C) - m_j(C)| \leqslant [1 - \delta(A)][M_j(B) - m_j(B)]。 \tag{12}$$

证 不失一般性可设 $c_{i_1 j} \geqslant c_{i_2 j}$，于是有

$$\begin{aligned} |c_{i_1 j} - c_{i_2 j}| &= c_{i_1 j} - c_{i_2 j} = \sum_{r=1}^{N} a_{i_1 r} b_{rj} - \sum_{r=1}^{N} a_{i_2 r} b_{rj} = \sum_{r=1}^{N} (a_{i_1 r} - a_{i_2 r}) b_{rj} \\ &= \sum_{a_{i_1 r} \geqslant a_{i_2 r}} (a_{i_1 r} - a_{i_2 r}) b_{rj} - \sum_{a_{i_1 r} < a_{i_2 r}} (a_{i_2 r} - a_{i_1 r}) b_{rj} \\ &\leqslant \sum_{a_{i_1 r} \geqslant a_{i_2 r}} (a_{i_1 r} - a_{i_2 r}) M_j(B) - \sum_{a_{i_1 r} < a_{i_2 r}} (a_{i_2 r} - a_{i_1 r}) m_j(B)。 \end{aligned} \tag{13}$$

因为 A 是随机矩阵，所以 $\sum_{r=1}^{N} (a_{i_1 r} - a_{i_2 r}) = 0$，故

$$\sum_{a_{i_1 r} \geqslant a_{i_2 r}} (a_{i_1 r} - a_{i_2 r}) = \sum_{a_{i_1 r} < a_{i_2 r}} (a_{i_2 r} - a_{i_1 r}) \tag{14}$$

将式(14)代入式(13)，并用式(7)便得

$$\begin{aligned} |c_{i_1 j} - c_{i_2 j}| &\leqslant \Big[\sum_{a_{i_1 r} \geqslant a_{i_2 r}} (a_{i_1 r} - a_{i_2 r}) \Big] [M_j(B) - m_j(B)] \\ &= \Big[\sum_{r=1}^{N} (a_{i_1 r} - I(a_{i_1 r}, a_{i_2 r})) \Big] [M_j(B) - m_j(B)] \\ &= [1 - \delta_{i_1 i_2}(A)][M_j(B) - m_j(B)], \qquad i \leqslant i_1, i_2, j \leqslant N, \end{aligned}$$

此即式(11)。应用式(8)，由式(11)便知：

$$|c_{i_1 j} - c_{i_2 j}| \leqslant [1 - \delta(A)][M_j(B) - m_j(B)], \qquad 1 \leqslant i_1, i_2, j \leqslant N$$

既然上式对任何 $i_1, i_2 : 1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant N$ 都成立，又 N 是有限值，特别地对 $c_{i_1 j} = M_j(C), c_{i_2 j} = m_j(C)$ 也成立，引理得证。

定理 9 状态空间 S 为 $\{1, \cdots, N\}$ 的有限齐次马氏链 X 的一步转移概率矩阵是 $P = [p_{ij}]$，如果存在一正整数 m，使 P 的 m 次幂 $P^m = [p_{ij}^{(m)}]$ 满足下列条件：记 $\delta_j = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} p_{ij}^{(m)}$，$1 \leqslant j \leqslant N$，

$$\sum_{j=1}^{N} \delta_j = \varepsilon > 0, \tag{15}$$

即 P^m 中至少有一列的元素全都大于 0。则 X 具有遍历性，即存在不依赖于 i 的极限：$\lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, 1 \leqslant i, j \leqslant N$，而且 $\sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j = 1$。此外，还有

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leqslant (1 - \varepsilon)^{[n/m]}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N, \ n > m, \tag{16}$$

其中 $[n/m]$ 是不超过 n/m 的最大整数。

证 因为对任何 $n = 2, 3, \cdots$，$P^n = PP^{n-1}$，又 P 是随机矩阵，于是对任一个固定的 j($1 \leqslant j \leqslant N$)，易验证

$$m_j(P^{n-1}) \leqslant m_j(P^n) \leqslant M_j(P^n) \leqslant M_j(P^{n-1}), \tag{17}$$

其次，当 $n > m$ 时，取 $A = P^m, B = P^{n-1}$，并注意到此 A 是随机矩阵。由式(9)及式(15)，可得

$$1 \geqslant \delta(A) = \delta(P^m) \geqslant \sum_{j=1}^{N} \delta_j = \varepsilon > 0,$$

因此 $0 \leqslant 1-\varepsilon < 1$。利用引理 1 中的式 (12) 有

$$[M_j(P^n) - m_j(P^n)] \leqslant (1-\varepsilon)[M_j(P^{n-m}) - m_j(P^{n-m})], \qquad 1 \leqslant j \leqslant N。$$

反复使用此式便有：对任何 $j, 1 \leqslant j \leqslant N$，

$$\begin{aligned}[M_j(P^n) - m_j(P^n)] &\leqslant (1-\varepsilon)^{[n/m]}[M_j(P^{n-[n/m]m}) - m_j(P^{n-[n/m]m})] \\ &\leqslant (1-\varepsilon)^{[n/m]}, \qquad n > m。\end{aligned} \tag{18}$$

由式 (17)、(18) 并利用区间套定理知：极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 存在与 i 无关，而且式(16)成立。又因对任何正整数 n, P^n 是随机矩阵，便得 $\sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j = 1$。定理得证。

推论 1 有限齐次马氏链 X 以 $\{1,\cdots,N\}$ 为状态空间，一步转移概率矩阵为 $P=[p_{ij}]$，如果存在一正整数 m，使 $P^m = [p_{ij}^{(m)}]$ 中有某 L 个列($1 \leqslant L \leqslant N$)的诸元素 $p_{ij}^{(m)}$ 有 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{p_{ij}^{(m)}\} \geqslant \delta > 0$，$j$ 可等于这 L 个列的任一序号。则 X 具有遍历性，即存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, 1 \leqslant j \leqslant N$，而且 $\sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j = 1$。又当 $n > m$ 时，总有

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leqslant (1 - L\delta)^{[n/m]}。 \tag{19}$$

证 由定理 9 及式(10)即得本推论。

推论 2 以 $\{1,\cdots,N\}$ 为状态空间，以 $P=[p_{ij}]$ 为一步转移概率矩阵的有限齐次马氏链 X 具有遍历性的充要条件是：存在某正整数 m，使 P^m 中至少有一列的元素全都大于 0。

证 充分性已由定理 9 证实。现证必要性。依遍历性的定义，存在不依赖于 i 的极限：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N。 \tag{20}$$

因为对每个正整数 n, P^n 都是随机矩阵，所以

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j。$$

由此可见至少有一个 $j(1 \leqslant j \leqslant N)$ 使 $\pi_j > 0$，于是从式(20)知：必存在某正整数 m，使得 $n \geqslant m$ 时，都有 $p_{ij}^{(n)} > 0, 1 \leqslant i \leqslant N$，即 $P^m, P^{m+1}, \cdots$ 中第 j 列的元素全大于 0，证毕。

以上的讨论引出了下面一般性的概念与问题。对一个 $N \times N$ 随机矩阵 $P=[p_{ij}]$，记 $P^n = [p_{ij}^{(n)}], n = 1,2,\cdots$。如果存在不依赖于 i 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, 1 \leqslant i, j \leqslant N$，或等价地若存在某正整数 m，使 P^m 中至少有一列元素全大于零，则称 P **具有遍历性**或为**遍历矩阵**。判断有限齐次马氏链是否具有遍历性，也就是判断它的转移概率矩阵是否具有遍历性。因此对于实际应用更为重要的问题是如何具体而快速地判定随机矩阵 P 是否为遍历的。

如果 P 是 $N \times N$ 的遍历随机矩阵，故必有正整数 m 与 $j(1 \leqslant j \leqslant N)$ 使 P^m 的第 j 列元素全大于 0，由式 (17) 知 P^{m+1}、P^{m+2}、$\cdots$ 的第 j 列元素也必全大于 0，于是必存在使 P^m 中至少有一列元素全大于 0 的最小正整数 $m(P)$，称它为 P 的**遍历指数**。对给定的正整数 N，所有 $N \times N$ 的遍历随机矩阵全体记作 $\{P_N\}$。现在试问：是否存在关于 $\{P_N\}$ 是一致的上确界 $\overline{m}(P_N) \triangleq \sup\limits_{P\in\{P_N\}}\{m(P)\}$？若 $\overline{m}(P_N)$ 存在有限，那么对任意取定的 $N \times N$ 随机矩阵 P，如有正整数 $m > \overline{m}(P_N)$，使 P^m 仍无一列元素全都大于 0，则立刻可断定此 P 不是遍历矩阵，因此遍历指数的一致上确界是一个有意义的数字特征，关于它的存在性与确切估计可归结成如下

的定理。

定理 10 任意给定正整数 N，相对于所有 $N\times N$ 的遍历随机矩阵集合 $\{P_N\}$ 而言，遍历指数的一致上确界 $\overline{m}(P_N)$ 必存在，而且

(i) $$\overline{m}(P_N)\leqslant \min\{2^N, N^2\}\},\qquad N=2,3,\cdots, \tag{21}$$

由此，对任一 $N\times N$ 随机矩阵 P，最多只需作 $[2\lg N/\lg 2]+1$ 次 N 阶方阵乘法，就可判定 P 是否具有遍历性。

(ii) $$\overline{m}(P_N)=N^2-3N+3,\qquad N=2,3,\cdots。 \tag{22}$$

由此，对任一 $N\times N$ 随机矩阵 P，最多只需作 $[\lg(N^2-3N+3)/\lg 2]+1$ 次 N 阶矩阵的乘法，即可判定 P 是否为遍历矩阵。

定理 10 的证明篇幅较大，本书不作论述，可参看文献 [19]、[20]。定理 10 中的结论 (i) 与 (ii) 是一致的，后者比前者更为精细，但在某些场合使用结论 (i) 或许是较方便的。

本节最后将用一个数字实例来介绍有限齐次马氏链 X 的状态空间 S 唯一分解为若干个不可分闭集之并，同时确定状态周期的一种有效方法。

例 1 设 $S=\{1,\cdots,7\}$，X 的一步转移概率矩阵 P 为

$$P=\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0\\ 3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 6 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0\\ 7 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0\end{array}$$

画出如下与 P 相应的有向图作为此 P 的几何表征。

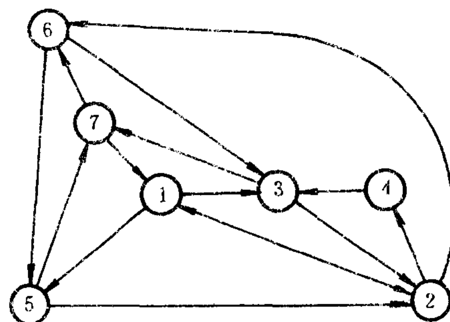


图 1　状态转移有向图

其中每个顶点 ⓘ看作为状态 i，$i=1,\cdots,7$。对 $i,j=1,\cdots,7$，当且仅当 $p_{ij}>0$ 时，才表示为 ⓘ→ⓙ。由图 1 及 C-K 方程知，自 $\{1,\cdots,7\}$ 中任何一个状态可达到任何另一个状态或自己，因此 X 不可分而且每个状态都是正常返的。现在要对 S 按照 Ⅱ．定理 38 的要求进行分解。

先任意取定一个状态，譬如是 1，而将状态 1 所属的分解后的状态子集记作 G_0，据 Ⅱ．定理 38，应将一切自状态 1 经一步转移可达到的状态所属的分解后的状态子集记作 G_1，在本例中应将状态 3 与 5 归属于 G_1，同理，应将一切自状态 3 或 5 经一步转移可达到的状态

所属的分解后的状态子集记作 G_2，照此方法继续做下去，只需有限多次手续，X 的所有（7 个）状态必将都有归属，到此为止，并得如图 2 所示的每个状态的归属表。

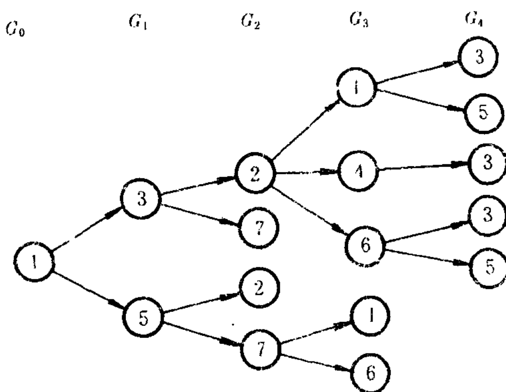


图 2　状态归属示意图

根据Ⅱ．定理 38，任何两个状态集 G_n、G_m 或不相交或完全重合，有且只有这两种可能，因此在图 2 中应有：$G_3 = G_0, G_4 = G_1$。最后便得：$G_0 = \{1,4,6\}, G_1 = \{3,5\}, G_2 = \{2,7\}$，并可断定周期 $d = 3$。

§2　有限马尔科夫链的代数处理方法

研究马尔科夫随机系统的稳定性能，判断马氏链是否具有遍历性，判别其状态的属性都离不开多步转移概率 $\{p_{ij}^{(n)}\}$，在状态个数是无限的一般情形下，直接计算 $\{p_{ij}^{(n)}\}$ 是很困难的，有时甚至是行不通的，即使在状态个数是有限的特殊情形下，计算量之大、繁复程度之高也很可观。因此，如能推导出 $p_{ij}^{(n)}$ 的明显表达式，无疑是很有用的。本节将凭借代数工具寻求 P 的特征值与 $p_{ij}^{(n)}$、遍历性、常返性、周期性、闭集等之间的关系。从而，给出了 $p_{ij}^{(n)}$、$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$、$f_{ij}$、$\mu_{jj}$ 等的明显表达式，并建立了常返性、周期性、状态空间分解的另一种判别准则。为此需要先做一些准备。

1. 几个预备引理

定义　任意取定正整数 N，设 P 为 $N \times N$ 方阵，称数 λ 是 P 的一个**特征值**，如果存在非零 N 维列向量 X 使得 $PX = \lambda X$ 成立，这时称此 X 为相应于特征值 λ 的（右）**特征向量**。在全体相应于 λ 的（右）特征向量的线性无关组中，所含向量的最大个数称为 P 的特征值 λ 的**几何重数**。记 I 为 N 阶单位矩阵，则称行列式 $|\lambda I - P|$ 为 P 的**特征多项式**，称 $|\lambda I - P| = 0$ 为 P 的**特征方程**，特征方程的根 λ 称为 P 的**特征根**，特征根 λ 的重数称为 λ 的**代数重数**。

引理 2　设 P 是 $N \times N$ 实方阵，则

(i)　λ 为 P 的特征值的充要条件是 λ 为 P 的特征根；

(ii)　以 P' 表示 P 的转置矩阵，以 $\lambda(P)$ 记 P 的所有特征根全体，则 $\lambda(P') = \lambda(P)$；

(iii)　设 P 的特征值 λ 的几何重数为 θ，此 λ 作为 P 的特征根的代数重数为 φ，则 $\theta \leqslant \varphi$。

证　由定义及齐次线性方程组有非零解的条件即得 (i)。注意到 $|\lambda I - P'| = |(\lambda I$

$-P)' | = |\lambda I - P|$，便知 $\lambda(P') = \lambda(P)$。至于（iii）证略，参见[16]。

注　在有些书上[16]，定义数 λ 为 P 的一个特征值，如果存在非零 N 维行向量 Y 使得 $YP = \lambda Y$ 成立，并称此 Y 为相应于特征值 λ 的（左）特征向量。由前面的式子便有 $P'Y' = \lambda Y'$，故根据引理 2 之（ii）知上面两种方式定义的特征值概念实际上是等同的。

在本节中，为了叙述方便起见，不妨设有限齐次马氏链的状态空间 $S = \{1,\cdots,N\}$，转移概率矩阵 P 是 $N\times N$ 方阵。

引理 3　$\lambda=1$ 是转移概率矩阵 P 的特征值，并存在相应于 $\lambda=1$ 的 P 的非负特征向量。又任何 P 的特征值的模都不超过 1。

证　因为 P 是随机矩阵，所以 $\lambda=1$ 是 $|\lambda I - P| = 0$ 的一个解，由引理 2 之（i）便知 $\lambda = 1$ 是 P 的特征值。易验证 $X = [1,\cdots,1]'$ 是相应于 1 的 P 的正特征向量。

设 λ 是 P 的任一特征值。那么 $|\lambda I - P| = 0$，从而齐次线性方程组：$(\lambda I - P)X = 0$ 必有非零解列向量 $C = [c_1,\cdots,c_N]'$ 即 $\lambda c_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}c_j, i = 1,\cdots,N$。即然 C 非零，又 N 有限，故必有 $k(1\leqslant k\leqslant N)$ 使 $|c_k| = \max_{1\leqslant j\leqslant N}|c_j| > 0$。由此可得

$$|\lambda c_i| \leqslant \sum_{j=1}^{N} p_{ij}|c_j| \leqslant |c_k|\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = |c_k|, \qquad i = 1,\cdots,N,$$

特别地，对 $i = k$ 也有：$|\lambda c_k| \leqslant |c_k|$，或 $|\lambda| \leqslant 1$，引理证完。

引理 4　以 $A_{ij}(\lambda)(i,j = 1,\cdots,N)$ 记矩阵 $\lambda I - P$ 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式，则

$$A_{ij}(1) = A_{ii}(1), \qquad i,j = 1,\cdots,N, \tag{23}$$

即 $I - P$ 中每一行上所有元素的代数余子式均相同。

证　不妨取 $i = 1, j = 2$，那么

$$A_{11}(1) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1-p_{22} & -p_{23} & \cdots & -p_{2N} \\ -p_{32} & 1-p_{33} & \cdots & -p_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{N2} & -p_{N3} & \cdots & 1-p_{NN} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}(1) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -p_{21} & -p_{23} & \cdots & -p_{2N} \\ -p_{31} & 1-p_{33} & \cdots & -p_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{N1} & -p_{N3} & \cdots & 1-p_{NN} \end{vmatrix}$$

由行列式的性质，在 $A_{11}(1)$ 中，将各列之和代换第一列后，其值不变。再利用 $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$，可得 $A_{12}^{(1)} = A_{11}(1)$，一般情形类似可证。

引理 5[25]　设任给的 $N\times N$ 方阵 $P = [p_{ij}]$ 的特征多项式 $|\lambda I - P|$ 记作

$$\Phi(\lambda) = \lambda^N - A_1\lambda^{N-1} + A_2\lambda^{N-2} - \cdots + (-1)^N A_N。\tag{24}$$

删去 P 中的第 i 行、第 i 列$(1\leqslant i\leqslant N)$ 所得矩阵的特征多项式记作

$$\Phi_i(\lambda) = \lambda^{N-1} - B_{i1}\lambda^{N-2} + B_{i2}\lambda^{N-3} - \cdots + (-1)^{N-1}B_{iN-1}。\tag{25}$$

则对任意的 $i = 1,\cdots,N$，均有

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1-k}(-1)^k A_k p_{ii}^{(j)} z^{k+j} = 1 - B_{i1}z + B_{i2}z^2 - \cdots + (-1)^{N-1}B_{iN-1}z^{N-1}。\tag{26}$$

其中规定 $A_0 = 1, 0^0 = 1$。

证　由规定，当 $z=0$ 时，式(26)两方皆为1故式(26)成立。当 $z\neq 0$ 时，分以下两种情形证明。

若 $\lambda=\frac{1}{z}$ 不是 P 的特征值，那么

$$\det(I-zP)=z^N\det\left(\frac{1}{z}I-P\right)=z^N\Phi\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$=1-A_1z+A_2z^2-\cdots+(-1)^NA_Nz^N\neq 0, \tag{27}$$

故 $(I-zP)$ 为可逆矩阵，存在 $(I-zP)^{-1}$。又注意到

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1-k}P^jz^j\right)(I-zP)=\sum_{j=0}^{N-1-k}P^jz^j-\sum_{j=0}^{N-1-k}P^{j+1}z^{j+1}=I-P^{N-k}z^{N-k},$$

对任何 $k=0,\cdots,N-1$ 都成立，由此可得

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1-k}(-1)^kA_kP^jz^{k+j}=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^kA_kz^k(I-P^{N-k}z^{N-k})(I-zP)^{-1}$$
$$=\left[\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^kA_kz^kI-\left(\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^kA_kP^{N-k}\right)z^N\right](I-zP)^{-1}, \tag{28}$$

依据凯莱-哈密顿（Cayley—Hamilton）定理知：

$$\Phi(P)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^kA_kP^{N-k}=0,$$

故

$$(-1)^NA_NI=-\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^kA_kP^{N-k}。$$

将此式代入式(28)的右方，便有

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1-k}(-1)^kA_kP^jz^{k+j}=\left[\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^kA_kz^k+(-1)^NA_Nz^N\right]I(I-zP)^{-1}$$
$$=z^N\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^kA_k\frac{1}{z^{N-k}}\right)(I-zP)^{-1}$$
$$=z^N\Phi\left(\frac{1}{z}\right)(I-zP)^{-1}。 \tag{29}$$

又 $I-zP$ 的第 i 行第 i 列元素的代数余子式与 P 中除去第 i 行第 i 列所剩的 $(N-1)\times(N-1)$ 矩阵的特征多项式在 $\frac{1}{z}$ 处的值分别依次为

$$\begin{vmatrix} 1-zp_{11} & \cdots & -zp_{1i-1} & -zp_{1i+1} & \cdots & -zp_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -zp_{i-11} & \cdots & 1-zp_{i-1i-1} & -zp_{i-1i+1} & \cdots & -zp_{i-1N} \\ -zp_{i+11} & \cdots & -zp_{i+1i-1} & 1-zp_{i+1i+1} & \cdots & -zp_{i+1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -zp_{N1} & \cdots & -zp_{Ni-1} & -zp_{Ni+1} & \cdots & 1-zp_{NN} \end{vmatrix}、$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{z}-p_{11} & \cdots & -p_{1i-1} & -p_{1i+1} & \cdots & -p_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{i-11} & \cdots & \frac{1}{z}-p_{i-1i-1} & -p_{i-1i+1} & \cdots & -p_{i-1N} \\ -p_{i+11} & \cdots & -p_{i+1i-1} & \frac{1}{z}-p_{i+1i+1} & \cdots & -p_{i+1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{N1} & \cdots & -p_{Ni-1} & -p_{Ni+1} & \cdots & \frac{1}{z}-p_{NN} \end{vmatrix} = \Phi_i\left(\frac{1}{z}\right),$$

对比上面两式便知前者即 $I-zP$ 的第 i 行第 i 列元素的代数余子式等于 $z^{N-1}\Phi_i\left(\frac{1}{z}\right)$。由式(27) 已知 $|I-zP| = z^N\Phi\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0$，因此 $(I-zP)^{-1}$ 的第 i 行第 i 列元素是 $\left[z^N\Phi\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} z^{N-1}\Phi_i\left(\frac{1}{z}\right)$，再由式(29)、(25)即得式(26)。

若 $\lambda = \frac{1}{z}$ 是 P 的特征值，因为式(24)，$\Phi(\lambda)$ 是 λ 的连续函数，而且特征值最多只有 N 个，于是对足够小的 $\delta > 0$，总可使 $\Phi\left(\frac{1}{z}+\delta\right) \neq 0$，令

$$P_\delta \triangleq [p_{ij}(\delta)] \triangleq \begin{cases} p_{ii}-\delta, & i=j, \\ p_{ij}, & i\neq j。\end{cases} \tag{30}$$

记 P_δ 的特征多项式 $|\lambda I - P_\delta|$ 为 $\Phi_\delta(\lambda)$，而且

$$\Phi_\delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-(p_{11}-\delta) & -p_{12} & \cdots & -p_{1N} \\ -p_{21} & \lambda-(p_{22}-\delta) & \cdots & -p_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{N1} & -p_{N2} & \cdots & \lambda-(p_{NN}-\delta) \end{vmatrix} \tag{31}$$

$$= |(\lambda+\delta)I - P| = \Phi(\lambda+\delta) \neq 0,$$

依照前面的方法可对 P_δ 建立起相应的式(26)，然后对此式令 $\delta \downarrow 0$，由式(30)、(31)$P_\delta \to P$，$\Phi_\delta(\lambda) \to \Phi(\lambda)$，便知式(26)仍成立，引理证完。

下面再给出一个常要用到的引理。

引理 6 对任给的正整数 $M \geqslant 2$，以及任意的互不相同的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$，则

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i^r}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} (\lambda_i - \lambda_j)} = \begin{cases} 0, & r=0,\cdots,M-2, \\ 1, & r=M-1。\end{cases} \tag{32}$$

证 为证本引理，要用到 M 阶范德蒙特（Vandermonde）行列式

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{M-1} & \lambda_2^{M-1} & \cdots & \lambda_M^{M-1} \end{vmatrix},$$

以及下述等式：

$$V = \prod_{i=1}^{M-1}\prod_{j=i+1}^{M}(\lambda_j - \lambda_i);\tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{M} V_{ij} = 0,\qquad i = 2,\cdots,M,\tag{34}$$

其中 V_{ij} 是 V 的第 i 行第 j 列元素的代数余子式。

首先，对 $r=0$ 的情形证明式(32)，即证

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}(\lambda_i-\lambda_j)} = 0。\tag{35}$$

式(35)左方可改写为

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}(\lambda_i-\lambda_j)} = \frac{(-1)^{M-1}}{\prod\limits_{j=2}^{M}(\lambda_j-\lambda_1)} + \sum_{i=2}^{M-1}\frac{(-1)^{M-i}}{\prod\limits_{k=1}^{i-1}(\lambda_i-\lambda_k)\prod\limits_{j=i+1}^{M}(\lambda_j-\lambda_i)}$$

$$+\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{M-1}(\lambda_M-\lambda_j)}。\tag{36}$$

将式(36)右方各项通分，并利用式(33)，第一项变为

$$\frac{(-1)^{M-1}}{\prod\limits_{j=2}^{M}(\lambda_j-\lambda_1)} = \frac{(-1)^{M-1}}{\prod\limits_{i=1}^{M-1}\prod\limits_{j=i+1}^{M}(\lambda_j-\lambda_i)}\prod_{i=2}^{M-1}\prod_{j=i+1}^{M}(\lambda_j-\lambda_i)$$

$$= \frac{(-1)^{M-1}}{\prod\limits_{i=1}^{M-1}\prod\limits_{j=i+1}^{M}(\lambda_j-\lambda_i)}(-1)^{M+1}V_{M1}$$

一般地，容易验证第 m 项可写成

$$\frac{(-1)^{M-m}}{\prod\limits_{i=1}^{M-1}\prod\limits_{j=i+1}^{M}(\lambda_j-\lambda_i)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{M-1}\prod_{\substack{j=i+1\\j\neq m}}^{M}(\lambda_j-\lambda_i)$$

$$= \frac{(-1)^{M-m}}{\prod\limits_{i=1}^{M-1}\prod\limits_{j=i+1}^{M}(\lambda_j-\lambda_i)}(-1)^{M+m}V_{Mm},\qquad m=1,\cdots,M。\tag{37}$$

将式(37)代入式(36)，并利用式(34)可得

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}(\lambda_i-\lambda_j)} = \sum_{m=1}^{M}\frac{V_{Mm}}{\prod\limits_{i=1}^{M-1}\prod\limits_{j=i+1}^{M}(\lambda_j-\lambda_i)} = 0,$$

式(35)得证。

对 $0<r\leqslant M-1$ 的情形，将采用关于 r 和 M 的双重归纳法来证明式(32)。记

$$\psi_{Mr} = \sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^r}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}(\lambda_i-\lambda_j)},\qquad r=0,\cdots,M-1。$$

当 $M=2$ 时，显然 $\psi_{20}=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}+\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}=0$，而 $\psi_{21}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}=1$，即式(32)成立。现作归纳假设：式(32)对 M 和 r 已成立，即

$$\psi_{Mr}=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<M-1,\\ 1, & r=M-1,\end{cases}\tag{38}$$

往证

$$\psi_{M+1\,r+1}=\begin{cases}0, & 0\leqslant r+1<M,\\ 1, & r+1=M。\end{cases}\tag{39}$$

依定义，

$$\begin{aligned}\psi_{M+1\,r+1}&=\sum_{i=1}^{M+1}\frac{\lambda_i^{r+1}}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M+1}(\lambda_i-\lambda_j)}\\ &=\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{r+1}}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_{M+1})}+\frac{\lambda_{M+1}^{r+1}}{\prod\limits_{j=1}^{M}(\lambda_{M+1}-\lambda_j)}。\end{aligned}\tag{40}$$

又对每个 $i=1,\cdots,M$ ，有

$$\begin{aligned}&\lambda_i^r+\lambda_i^{r-1}\lambda_{M+1}+\cdots+\lambda_{M+1}^r+\frac{\lambda_{M+1}^{r+1}}{\lambda_i-\lambda_{M+1}}\\ &=[(\lambda_i^{r+1}-\lambda_i^r\lambda_{M+1})+(\lambda_i^r\lambda_{M+1}-\lambda_i^{r-1}\lambda_{M+1}^2)+\cdots\\ &\quad+(\lambda_i\lambda_{M+1}^r-\lambda_{M+1}^{r+1})+\lambda_{M+1}^{r+1}]/(\lambda_i-\lambda_{M+1})\\ &=\lambda_i^{r+1}/(\lambda_i-\lambda_{M+1})。\end{aligned}\tag{41}$$

将式 (41) 代入式(40)，便得

$$\begin{aligned}\psi_{M+1\,r+1}&=\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}(\lambda_i-\lambda_j)}\left[\lambda_i^r+\lambda_i^{r-1}\lambda_{M+1}+\cdots+\lambda_{M+1}^r+\frac{\lambda_{M+1}^{r+1}}{\lambda_i-\lambda_{M+1}}\right]\\ &\quad+\frac{\lambda_{M+1}^{r+1}}{\prod\limits_{j=1}^{M}(\lambda_{M+1}-\lambda_j)}\\ &=\psi_{Mr}+\lambda_{M+1}\psi_{Mr-1}+\cdots+\lambda_{M+1}^r\psi_{M0}+\lambda_{M+1}^{r+1}\psi_{M+1\,0},\end{aligned}\tag{42}$$

由归纳假设式 (38) 及已证的式(35)，即有

$$\psi_{Mr-k}=0,\ k=1,\ \cdots,\ r-1,\ r=1,\ \cdots,\ M-1;\quad \psi_{M+1\,0}=\psi_{M0}=0,$$

将它们代入式 (42)，并用归纳法得

$$\psi_{M+1\,r+1}=\psi_{Mr},\qquad r=1,\ \cdots,\ M-1,\ M=2,\ 3,\ \cdots.$$

这表明式 (39) 对 $M=2$，3，…皆成立。引理得证。

2. 多步转移概率的计算公式与遍历性

定理 11 设转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$ 具有互不相等的特征值 λ_1，…，λ_N。记特征值 λ_l 相应的特征矩阵 $\lambda_l I-P$ 的伴随矩阵为：

$$[\lambda_l I-P]^*=\begin{bmatrix}A_{11}(\lambda_l) & A_{21}(\lambda_l) & \cdots & A_{N1}(\lambda_l)\\ A_{12}(\lambda_l) & A_{22}(\lambda_l) & \cdots & A_{N2}(\lambda_l)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1N}(\lambda_l) & A_{2N}(\lambda_l) & \cdots & A_{NN}(\lambda_l)\end{bmatrix},\qquad l=1,\ \cdots,\ N。\tag{43}$$

其中每个 $A_{ij}(\lambda_l)(i,j=1,\cdots,N)$ 是 $\lambda_l I-P$ 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式，又设伴随矩阵

中的每一列$[A_{i1}(\lambda_l),\cdots,A_{iN}(\lambda_l)]'$ $(i=1,\cdots,N)$ 皆为非零向量，则 n 步转移概率为

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{N}A_{ji}(\lambda_l)\lambda_l^n\Big[\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{N}(\lambda_l-\lambda_m)\Big]^{-1},\qquad i,j=1,\cdots,N;\ n=1,2,\cdots,\tag{44}$$

证　首先只要注意到下列事实：实系数代数方程的复数根必是成对共轭出现；两个共轭复数 x，$\bar{x}$之和或积皆为实数；对任何实系数多项式 $F(x)$，必有 $F(\bar{x})=\overline{F(x)}$。由此便可断定式(44)右方的和式必为实数。

由伴随矩阵及特征根的定义，并用引理 2 之(i)以及行列式按行展开的拉普拉斯(Laplace)定理，可得

$$[\lambda_l I-P]\begin{bmatrix}A_{k1}(\lambda_l)\\A_{k2}(\lambda_l)\\\vdots\\A_{kN}(\lambda_l)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\qquad l,k=1,\cdots,N,\tag{45}$$

即伴随矩阵 $[\lambda_l I-P]^*$中的每一列都是相应于 P 的特征值 λ_l 的特征向量。令

$$T(k)=\begin{bmatrix}A_{k1}(\lambda_1)&A_{k1}(\lambda_2)&\cdots&A_{k1}(\lambda_N)\\A_{k2}(\lambda_1)&A_{k2}(\lambda_2)&\cdots&A_{k2}(\lambda_N)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{kN}(\lambda_1)&A_{kN}(\lambda_2)&\cdots&A_{kN}(\lambda_N)\end{bmatrix}\tag{46}$$

$$=[T_1(k),T_2(k),\cdots,T_N(k)],\qquad k=1,\cdots,N。$$

其中，$T_l(k)=[A_{k1}(\lambda_l),A_{k2}(\lambda_l),\cdots,A_{kN}(\lambda_l)]'$，$l=1,\cdots,N$。因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ 是互不相同的特征值，所以由代数知识 $T(k)$ 中各列相应的特征向量是线性无关的，从而每个 $T(k)(k=1,\cdots,N)$都是可逆的，而且 $T(k)$的逆矩阵为

$$T^{-1}(k)=\frac{1}{|T(k)|}\begin{bmatrix}T_{11}(k)&T_{21}(k)&\cdots&T_{N1}(k)\\T_{12}(k)&T_{22}(k)&\cdots&T_{N2}(k)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\T_{1N}(k)&T_{2N}(k)&\cdots&T_{NN}(k)\end{bmatrix},\quad k=1,\cdots,N,\tag{47}$$

其中 $T_{ij}(k)(i,j,k=1,\cdots,N)$是 $T(k)$中第 i 行第 j 列元素的代数余子式。注意到 $T_l(k)(l=1,\cdots,N)$是相应于 P 的特征值 λ_l 的特征向量，便有

$$\begin{aligned}T^{-1}(k)PT(k)&=T^{-1}(k)P[T_1(k),T_2(k),\cdots,T_N(k)]\\&=T^{-1}(k)[PT_1(k),PT_2(k),\cdots,PT_N(k)]\\&=T^{-1}(k)[\lambda_1T_1(k),\lambda_2T_2(k),\cdots,\lambda_NT_N(k)]\\&=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_N\end{bmatrix},\qquad k=1,\cdots,N;\end{aligned}\tag{48}$$

或

$$P=T(k)\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_N\end{bmatrix}T^{-1}(k),\qquad k=1,\cdots,N,\tag{49}$$

反复利用式(49)，以及归纳法，可得

$$P^n = T(k)\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N^n \end{bmatrix} T^{-1}(k) \qquad k = 1,\cdots,N; \quad n = 1,2,\cdots, \tag{50}$$

展开式(50)的右方,并应用式(47)即得

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{N} A_{ki}(\lambda_l)\lambda_l^n \frac{T_{jl}(k)}{|T(k)|}, \qquad i,j,k = 1,\cdots,N; \quad n = 1,2,\cdots \tag{51}$$

虽然 $T(k)$依赖于 k, $k=1$, $\cdots$, N, 但是可以证明 $T^{-1}(k)$ 的第 k 个列向量与 k 无关,即有

$$\frac{T_{kl}(k)}{|T(k)|} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq l}}^{N}(\lambda_l - \lambda_m)}, \qquad l,k = 1,\cdots,N。 \tag{52}$$

于是在式(51)中,取 $k=j$, 然后将式(52)所得的 $\frac{T_{jl}(j)}{|T(j)|}$ 代入式(51)即得要证的式(44)。

剩下的只要证式(52)。为此考察下面的非齐次线性方程组:

$$T(k)\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \vdots \\ \delta_{Nk} \end{bmatrix}, \quad \left(k = 1, \cdots, N, \ \delta_{lk} = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ 1, & l = k。\end{cases} \right) \tag{53}$$

因 $T(k)$ 可逆,故$[z_1,z_2,\cdots,z_N]' = T^{-1}(k)[\delta_{1k},\delta_{2k},\cdots,\delta_{Nk}]'$。即得方程组(53)的解:

$$z_l = T_{kl}(k)/|T(k)|, \quad l = 1,\cdots,N 。 \tag{54}$$

又因(53)是 N 个未知数 N 个方程的线性方程组,系数矩阵行列式$|T(k)|\neq 0$,故(54)是(53)的唯一解。另一方面,可将方程组(53)写成如下的形式:

$$\begin{cases} A_{k1}(\lambda_1)z_1 + \cdots + A_{k1}(\lambda_N)z_N = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{kk}(\lambda_1)z_1 + \cdots + A_{kk}(\lambda_N)z_N = 1, \qquad k = 1,\cdots,N, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{kN}(\lambda_1)z_1 + \cdots + A_{kN}(\lambda_N)z_N = 0, \end{cases} \tag{55}$$

其中每个代数余子式 $A_{kj}(\lambda_l)(k,j,l=1,\cdots,N)$都可展成 λ_l 的多项式:对每个 $k=1$, $\cdots$, N,

$$\begin{cases} A_{kk}(\lambda_l) = \lambda_l^{N-1} + b_{kk2}\lambda_l^{N-2} + \cdots + b_{kkN}\lambda_l^0, \\ A_{kj}(\lambda_l) = b_{kj2}\lambda_l^{N-2} + \cdots + b_{kjN}\lambda_l^0, \qquad j \neq k, \quad j = 1,\cdots,N \end{cases} \tag{56}$$

其中系数 b_{kji}, j, $i=1$, $\cdots$, N 都只是 p_{ij}, i, $j=1$, $\cdots$, N 的函数,都不依赖 λ_l 和 l。将式(56)代入式(55),并经整理可得:

$$
\begin{cases}
b_{k12}\sum_{l=1}^{N} z_l\lambda_l^{N-2} + \cdots + b_{k1N}\sum_{l=1}^{N} z_l\lambda_l^0 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{l=1}^{N} z_l\lambda_l^{N-1} + b_{kk2}\sum_{l=1}^{N} z_l\lambda_l^{N-2} + \cdots + b_{kkN}\sum_{l=1}^{N} z_l\lambda_l^0 = 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{kN2}\sum_{l=1}^{N} z_l\lambda_l^{N-2} + \cdots + b_{kNN}\sum_{l=1}^{N} z_l\lambda_l^0 = 0。
\end{cases}
\tag{57}
$$

利用引理 6，易验证

$$
z_l = \frac{1}{\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq l}}^{N}(\lambda_l - \lambda_m)}, \qquad l = 1, \cdots, N, \tag{58}
$$

是方程组 (57) 的解。既然方程组(53) 即(57) 的解是唯一的，因此由式(54)、(58) 即得式 (52)，证毕。

当 P 的 N 个特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 不是互不相等的，即特征根中有重根的情形，仍可推导出多步转移概率的计算公式[17]、[18]。

定理 12　设 λ_l 是转移概率矩阵 P 的 N_l 重特征根，$l=0, 1, \cdots, t$，$N=N_0+N_1+\cdots+N_t$，则对任何 $i, j=1, \cdots, N$，

$$
p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=0}^{t} \frac{1}{(N_l-1)!}\left[\frac{\lambda^n A_{ji}(\lambda)}{\prod_{\substack{m=0 \\ m\neq l}}^{t}(\lambda-\lambda_m)^{N_m}}\right]_{\lambda=\lambda_l}^{(N_l-1)}, \qquad n = 1,2,\cdots, \tag{59}
$$

其中 $F(\lambda)_{\lambda=\lambda_l}^{(N_l-1)}$ 表示函数 $F(\lambda)$ 在 λ_l 处的 N_l-1 阶导数值。

限于篇幅定理 12 的证明这里从略，详细证明可参见文献[18]，利用公式(44)和(59)计算 $p_{ij}^{(n)}$ 比采用一般传统的方法如文献[10]中所给的方法要简便得多。下面再进一步讨论与 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限有关的性质。

定理 13　设有限齐次马氏链 X 是不可分的，并具有遍历性，则极限概率 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, i, j=1, \cdots, N$，由下式给出：

$$
\pi_j = \frac{A_{jj}(1)}{\sum_{i=1}^{N} A_{ii}(1)}, \qquad j = 1, \cdots, N, \tag{60}
$$

从而平均回转时间为

$$
\mu_{jj} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_{ii}(1)}{A_{jj}(1)}, \qquad j = 1, \cdots, N, \tag{61}
$$

证　由定理 2 之推论、Ⅱ. 定理 3 之推论、Ⅱ. 定理 10 以及遍历性的假设知 $\{\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}} > 0, j=1, \cdots, N\}$ 是 X 的唯一的平稳分布。于是

$$
\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij}, \qquad j = 1, \cdots, N,
$$

即

$$
\pi' = \pi' P, \quad 或 \quad (I - P')\pi = 0。 \tag{62}
$$

其中 $\pi=[\pi_1,\cdots,\pi_N]'$。式(62)表明 π 是 P' 的对应于 $\lambda=1$ 的特征向量。又因 $|I-P'|=|I-P|=0$，所以 $\lambda=1$ 也是 P' 的特征值，若记 $A'_{ij}(1)$ 是 $I-P'$ 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式，那么利用行列式按行展开的拉普拉斯定理可得

$$(I-P')[A'_{i1}(1),A'_{i2}(1),\cdots,A'_{iN}(1)]'=[0,0,\cdots,0]', \tag{63}$$

注意到式（62）以及 π 是 X 的唯一的平稳分布，故

$$[\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N]'=c[A'_{i1}(1),A'_{i2}(1),\cdots A'_{iN}(1)]', \tag{64}$$

其中 c 是一待定常数。$A'_{ij}(1)$ 是 $I-P'$ 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式，也就是 $I-P$ 中第 j 行第 i 列元素的代数余子式，即 $A'_{ij}(1)=A_{ji}(1)$，又根据引理 4 知 $A_{ji}(1)=A_{jj}(1)$，$i,j=1,\cdots,N$。将它们代入式（64），

$$[\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N]'=c[A_{11}(1),A_{22}(1),\cdots,A_{NN}(1)]'。$$

既然 π 是概率分布，那么

$$1=\sum_{i=1}^{N}\pi_i=c\sum_{i=1}^{N}A_{ii}(1),\quad c=1\Big/\sum_{i=1}^{N}A_{ii}(1),$$

代入前式即得式（60）。再由 $\pi_j=1/\mu_{jj}$，$j=1$，…，N 便得式（61），证毕。

注 也可应用定理 11 中的公式（44），通过直接求证极限[17]：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{N}A_{ji}(\lambda_l)\lambda_l^n\Big[\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{N}(\lambda_l-\lambda_m)\Big]^{-1}=\frac{A_{jj}(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N}A_{ii}(1)},\qquad i,j=1,\cdots,N, \tag{65}$$

同样得到定理 13 的结论。这里当然要求特征根 λ_1，…，λ_N 是互不相同的。至于特征根中有重根的情形，可应用定理 12 得到下面的结果

定理 14 设 λ_l 是 P 的 N_l 重特征根，$l=0$，1，…，t，$N=N_0+N_1+\cdots+N_t$，若 $\lambda_0=1$，$N_0=1$，而 $|\lambda_l|<1$，$l=1$，…，t，则

(i)
$$\lim_{n\to\infty}P^n=\frac{[I-P]^*}{\prod\limits_{l=1}^{t}(1-\lambda_l)^{N_l}}=\frac{[I-P]^*}{(|\lambda I-P|)'_{\lambda=1}}。 \tag{66}$$

其中 $[I-P]^*$ 是 $I-P$ 的伴随矩阵。

(ii) 若 $A_{jj}(1)\neq0$，则 $f_{ij}=1,i,j=1,\cdots,N$。而且式（61）仍成立，即

$$\mu_{jj}=\sum_{i=1}^{N}A_{ii}(1)/A_{jj}(1),j=1,\cdots,N。$$

若 $\lambda_0=1$ 为 N_0 重根，其它 $|\lambda_l|<1$，$l=1$，…，t，则

(iii)
$$\lim_{n\to\infty}P^n=\frac{1}{(N_0-1)!}\left(\frac{\lambda^n[\lambda I-P]^*}{\prod\limits_{l=1}^{t}(\lambda-\lambda_l)^{N_l}}\right)^{(N_0-1)}_{\lambda=1} \tag{67}$$

(iv) 进而设 $\left(\dfrac{\lambda^n A_{jj}(1)}{\prod\limits_{l=1}^{t}(\lambda-\lambda_l)^{N_l}}\right)^{(N_0-1)}_{\lambda=1}\neq0$，则

$$f_{ij}=\left(\frac{\lambda^n A_{ji}(\lambda)}{\prod\limits_{l=1}^{t}(\lambda-\lambda_l)^{N_l}}\right)^{(N_0-1)}_{\lambda=1}\Bigg/\left(\frac{\lambda^n A_{jj}(\lambda)}{\prod\limits_{l=1}^{t}(\lambda-\lambda_l)^{N_l}}\right)^{(N_0-1)}_{\lambda=1}。 \tag{68}$$

定理 14 的详细证明参看文献[18]，这里从略，仅举例说明这些公式的应用是简明有效的。

例 2 设有限齐次马氏链 X 的状态空间为 {1，2，3，4}，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0 & p & 0 & q\\ q & 0 & p & 0\\ 0 & q & 0 & p\\ p & 0 & q & 0\end{bmatrix},\qquad 0<p<1,\ q=1-p。\tag{69}$$

这里 X 作一个四状态的圆周随机徘徊。P 的特征方程 $|\lambda I-P|=0$ 的特征根是 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=\sqrt{-1}(q-p)$，$\lambda_4=-\sqrt{-1}(q-p)$，互不相同，而且

$$\prod_{m=2}^{4}(\lambda_1-\lambda_m)=4(p^2+q^2),\quad \prod_{\substack{m=1\\ m\neq 2}}^{4}(\lambda_2-\lambda_m)=-4(p^2+q^2),$$

$$\prod_{\substack{m=1\\ m\neq 3}}^{4}(\lambda_3-\lambda_m)=4\sqrt{-1}(p^4-q^4),\quad \prod_{m=1}^{3}(\lambda_4-\lambda_m)=-4\sqrt{-1}(p^4-q^4)。$$

再计算特征矩阵

$$\lambda_l I-P=\begin{bmatrix}\lambda_l & -p & 0 & -q\\ -q & \lambda_l & -p & 0\\ 0 & -q & \lambda_l & -p\\ -p & 0 & -q & \lambda_l\end{bmatrix},\qquad l=1,\cdots,4,$$

中各元素的代数余子式。得

$$A_{ji}(\lambda_1)=(p^2+q^2),\qquad i,j=1,\cdots,4,$$
$$A_{ji}(\lambda_2)=(-1)^{i+j+1}(p^2+q^2),\qquad i,j=1,\cdots,4,$$
$$A_{ji}(\lambda_3)=(\sqrt{-1})^{j-i+1}(p^4-q^4),\qquad i,j=1,\cdots,4,$$
$$A_{ji}(\lambda_4)=(\sqrt{-1})^{i-j-1}(p^4-q^4),\qquad i,j=1,\cdots,4。$$

将它们代入公式（44），得

$$p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{4}[1+(-1)^{i+j+n}+(\sqrt{-1})^{j-i+n}(q-p)^n$$
$$+(\sqrt{-1})^{i-j-n}(q-p)^n],\qquad i,j=1,\cdots,4;n=1,2,\cdots$$

例 3　设有限齐次马氏链 X 的状态空间是 $\{1,2,3,4\}$，一步转移概率矩阵及其特征方程为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2\end{bmatrix},\quad |\lambda I-P|=\lambda(\lambda-1)^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)=0,$$

故 $\lambda_0=1$ 是二重根，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\frac{1}{2}$ 不是重根，试求 f'_{31}，这时要用定理 14 之（iv）中的式（68）。因为

$$\left[\frac{\lambda^n A_{11}(\lambda)}{\lambda\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\right]'_{\lambda=1}=(\lambda^n(\lambda-1))'_{\lambda=1}=1,$$

$$\left[\frac{\lambda^n A_{13}(\lambda)}{\lambda\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\right]'_{\lambda=1}=\left(\frac{1}{3}\lambda^{n-1}(\lambda-1)\right)'_{\lambda=1}=\frac{1}{3}。$$

将它们代入式(68)即得 $f_{31}=\frac{1}{3}$。再应用定理 14 之(iii)便得

$$\lim_{n\to\infty} p_{41}^{(n)}=\left[\frac{\lambda^{4}A_{14}(\lambda)}{\lambda(\lambda-\frac{1}{2})}\right]'_{\lambda=1}=\left[\frac{\frac{1}{4}\lambda^{4}(\lambda-1)}{\lambda-\frac{1}{2}}\right]'_{\lambda=1}=\frac{1}{2}。$$

注 从上面的实例可以看出，应用公式(44)、(67)、(68)等进行计算，虽然直接简捷，但是当状态的个数 N 较大时，要计算 N 阶方阵的特征根及任一元素的代数余子式也是很麻烦的，所以应根据具体情况，选择合适的方法。为便于从方法上进行比较，这里再应用求解线性方程组的方法来计算 f_{ij} 和 μ_{jj}，完整地给出 I．例 1 所提出的著名问题的解答。

例 4 设有限齐次马氏链 X 的状态空间为 $\{0,1,\cdots,2N\}$，其一步转移概率矩阵如 I．(32)式所给

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\q&0&p&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&q&0&p\\0&0&0&\cdots&0&0&1\end{bmatrix},\qquad 0<p<1,\ q=1-p。$$

由此可见，"0"与"$2N$"是两个吸收状态，而 $\{1,\cdots,2N-1\}$ 是非本质类。称此 X 作**具有两个吸收壁的随机徘徊**。试求首达概率 f_{j0} 与 f_{j2N}，以及从状态 j 出发首次到达 0 或 $2N$ 的平均时间 u_j，$j=1,\cdots,2N-1$。因为定理 5，$f_{j0}+f_{j2N}=1$，$j=1,\cdots,2N-1$。所以只需求 f_{j0}，$j=1,\cdots,2N-1$。显然 $f_{00}=1$，$f_{2N0}=0$。根据 Ⅱ．定理 14 之(i)，只要求下列线性方程组的最小非负解：

$$\begin{cases}z_1=pz_2+q,\\z_j=pz_{j+1}+qz_{j-1},\qquad j=2,\cdots,2N-2\\z_{2N-1}=qz_{2N-2}\end{cases}\tag{70}$$

如果定义 $z_0=1(=f_{00})$，$z_{2N}=0(=f_{2N0})$，则线性方程组(70)可统一地写成：

$$z_j=pz_{j+1}+qz_{j-1},\qquad j=1,\cdots,2N-1。\tag{71}$$

由此得

$$p(z_{j+1}-z_j)=q(z_j-z_{j-1}),\qquad j=1,\cdots,2N-1。$$

$$z_{j+1}-z_j=\left(\frac{q}{p}\right)(z_j-z_{j-1})=\cdots=\left(\frac{q}{p}\right)^j(z_1-z_0),$$

$$z_{j+1}-1=\sum_{v=0}^{j}\left(\frac{q}{p}\right)^v(z_1-1),\qquad j=1,\cdots,2N-1。\tag{72}$$

由 $z_{2N}=0$ 及式(72)得

$$1-z_1=1\Big/\sum_{v=0}^{2N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^v,\tag{73}$$

由式(73)与式(72)即得：对任何 $j=1,\cdots,2N-1$，

$$f_{j0}=z_j=\begin{cases}1-(j/2N),&\text{当 } p=q=1/2,\\\dfrac{(q/p)^{2N}-(q/p)^j}{(q/p)^{2N}-1},&\text{当 } p\neq q。\end{cases}\tag{74}$$

为求 μ_j，$j=1,\cdots,2N-1$，根据 Ⅱ．定理 17 只需求下列线性方程组的最小非负解：

$$\begin{cases} z_1 = pz_2 + 1, \\ z_j = qz_{j-1} + pz_{j+1} + 1, \qquad j = 2,\cdots,2N-2 \\ z_{2N-1} = qz_{2N-2} + 1。 \end{cases} \tag{75}$$

令 $z_0=z_{2N}=0$，方程组 (75) 可统一地写成

$$z_j = qz_{j-1} + pz_{j+1} + 1, \qquad j = 1,\cdots,2N-1, \tag{76}$$

或

$$p(z_{j+1} - z_j) = q(z_j - z_{j-1}) - 1, \qquad j = 1,\cdots,2N-1。 \tag{77}$$

记 $r=q/p$，当 $p\neq q$，即 $r\neq 1$ 时，由式 (77) 得

$$\begin{aligned} z_{j+1} - z_j &= r(z_j - z_{j-1}) - \frac{1}{p} = \cdots \\ &= r^j(z_1 - z_0) - [r^{j-1} + \cdots + 1]\frac{1}{p} \\ &= r^j(z_1 - z_0) + \frac{r^j - 1}{p - q}, \qquad j = 1,\cdots,2N-1, \end{aligned}$$

$$z_{j+1} - z_1 = \sum_{v=1}^{j} r^v(z_1 - z_0) + \frac{1}{p-q}\Big[\sum_{v=1}^{j} r^v - j\Big],$$

$$z_{j+1} = \frac{r^{j+1} - 1}{r - 1}z_1 + \frac{1}{p-q}\Big[\frac{r^{j+1} - r}{r - 1} - j\Big], \qquad j = 1,\cdots,2N-1, \tag{78}$$

由 $z_{2N}=0$ 及式 (78) 可知：

$$0 = \frac{r^{2N} - 1}{r - 1}z_1 + \frac{1}{p-q}\Big[\frac{r^{2N} - r}{r - 1} - (2N-1)\Big],$$

从而

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{p-q}\Big[(2N-1)\frac{r-1}{r^{2N}-1} - \frac{r^{2N} - r}{r^{2N} - 1}\Big] \\ &= \frac{1}{p-q}\Big[2N\frac{r-1}{r^{2N}-1} - 1\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_j = z_j &= \frac{r^j - 1}{r - 1}z_1 + \frac{1}{p-q}\Big[\frac{r^j - r}{r - 1} - (j-1)\Big] \\ &= \frac{1}{p-q}\Big[2N\frac{r^j - 1}{r^{2N} - 1} - j\Big], \qquad j = 1,\cdots,2N-1。 \end{aligned} \tag{79}$$

当 $p=q=\frac{1}{2}$，即 $r=1$ 时，经过类似地推算，有

$$z_{j+1} - z_j = (z_j - z_{j-1}) - 2 = \cdots = (z_1 - z_0) - 2j, \qquad j = 1,\cdots,2N-1$$

$$z_{j+1} = (j+1)z_1 - j(j+1), \qquad j = 0,\cdots,2N-1,$$

$$0 = z_{2N} = 2Nz_1 - 2N(2N-1),$$

从而，$z_1=2N-1$，且

$$\begin{aligned} \mu_j = z_j &= jz_1 - j(j-1) = j(2N-1) - j(j-1) \\ &= j(2N-j), \qquad j = 1,\cdots,2N-1 \end{aligned} \tag{80}$$

即使在 N 较大时，式 (74)、(79)、(80) 都是容易计算的。

3. 常返性、周期性与状态空间分解的代数处理

为了建立状态常返性的另一种判别准则，现在利用式 (24)、(25) 所表示的特征多项式 $\Phi(\lambda)$、$\Phi_i(\lambda)$ 来给出数列 $\{p_{ii}^{(n)},=0,1,\cdots\}$ 的母函数 $P_{ii}(z)\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}z^n$ $(|z|<1)$ 的明显表达式。由

凯莱-哈密顿定理知：

$$0 = \Phi(P) = P^N - A_1 P^{N-1} + A_2 P^{N-2} - \cdots + (-1)^N A_N I,$$

从而

$$P^N = A_1 P^{N-1} - A_2 P^{N-2} + \cdots + (-1)^{N-1} A_N I, \tag{81}$$

用 P^n 乘式（81）两边各项，并比较两边的第 i 行第 i 列元素有

$$p_{ii}^{(n+N)} = A_1 P_{ii}^{(n+N-1)} - A_2 P_{ii}^{(n+N-2)} + \cdots + (-1)^{N-1} A_N p_{ii}^{(n)}, \qquad n = 0,1,\cdots \tag{82}$$

再以 z^{n+N} 乘式（82）两边各项，并对 n 从 0 到∞相加，便得

$$\begin{aligned} p_{ii}(z) - [p_{ii}^{(0)} + p_{ii}^{(1)} z + \cdots + p_{ii}^{(N-1)} z^{N-1}] \\ = A_1 z[P_{ii}(z) - (p_{ii}^{(0)} + p_{ii}^{(1)} z + \cdots + p_{ii}^{(N-2)} z^{N-2})] \\ - A_2 z^2 [P_{ii}(z) - (p_{ii}^{(0)} + p_{ii}^{(1)} z + \cdots + p_{ii}^{(N-3)} z^{N-3})] \\ + \cdots + (-1)^{N-1} A_N z^N P_{ii}(z), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} P_{ii}(z)[1 - A_1 z + A_2 z^2 - \cdots + (-1)^N A_N z^N] \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \Big[(-1)^k A_k z^k \Big(\sum_{j=0}^{N-1-k} p_{ii}^{(j)} z^j \Big) \Big]。 \end{aligned}$$

由此式及引理 5 中的式（26）知：对任何 $i=1,\cdots,N$，$|z|<1$，

$$P_{ii}(z) = \frac{1 - B_{i1} z + B_{i2} z^2 - \cdots + (-1)^{N-1} B_{i,N-1} z^{N-1}}{1 - A_1 z + A_2 z^2 - \cdots + (-1)^N A_N z^N} = z \frac{\Phi_i(1/z)}{\Phi(1/z)} \tag{83}$$

定理 15[26] 如果 $\lambda=1$ 分别依次是 $\Phi(\lambda)=0$ 及 $\Phi_i(\lambda)=0$ 的 k 重和 k_i 重根，则 i 为常返状态的充要条件是 $k>k_i$。

证 据 Ⅱ. 定理 13 之（iii），状态 i 为常返的充要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ 发散，即 $P_{ii}(1)=\infty$。令

$$\widetilde{\Phi}_i(1/z) = \Phi_i(1/z)/(1/z - 1)^{k_i}, \quad \widetilde{\Phi}(1/z) = \Phi(1/z)/(1/z - 1)^k,$$

那么 $\widetilde{\Phi}_i(1/z)$ 与 $\widetilde{\Phi}(1/z)$ 中都不再含有 $(1/z-1)$ 的因式，从而，当 $z\to 1$ 时，$z\dfrac{\widetilde{\Phi}_i(1/z)}{\widetilde{\Phi}(1/z)}$ 将趋于非零常数，

$$\left(\frac{1}{z} - 1\right)^{k_i - k} \xrightarrow[z\to 1]{} \begin{cases} \infty, & k_i < k, \\ 1, & k_i = k, \\ 0 & k_i > k。 \end{cases}$$

于是由式（83），

$$P_{ii}(z) = z \frac{\Phi_i(1/z)}{\Phi(1/z)} = z \frac{\widetilde{\Phi}_i(1/z)}{\widetilde{\Phi}(1/z)} (1/z - 1)^{k_i - k},$$

由此可见 $P_{ii}(1)=\infty$ 的充要条件是 $k>k_i$，定理得证。

由定理 15 及引理 3 即得下面的推论，

推论 对状态 i，如果 $\lambda=1$ 不是 $\Phi_i(\lambda)=0$ 的根，则 i 必为常返状态。

我们还可借助代数工具从另一个角度来考察状态空间的分解与状态的周期性。

定理 16 有限齐次马氏链 X 的转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$ 的特征值 1 的几何重数等于 X 的状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$ 中不可分闭子集的个数。

证 根据Ⅰ. 定理 36 即状态空间 S 分解定理，将状态适当改编序号，转移概率矩阵 P 可改写成如下分块矩阵形式：

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & P_m & 0 \\ R_1 & R_2 & \cdots & R_m & Q \end{bmatrix},$$

其中每个 P_i $(i=1, \cdots, m)$ 对应于 S 分解中的一个全由正常返状态构成的不可分闭子集 C_i，C_i 含有 N_i 个状态。Q 对应着 S 分解中所有非常返状态构成的子集。由Ⅱ. 定理 31 及本章的引理 3、引理 2 必存在对应于 P 的特征值 1 的（左）特征向量 $X_i=[0, \cdots, 0, x_1^{(i)}, \cdots, x_{N_i}^{(i)}, 0, \cdots, 0]$，使 $X_iP=X_i$，$i=1, \cdots, m$。在每个 X_i 中相应于 C_i 的坐标向量 $[x_1^{(i)}, \cdots, x_{N_i}^{(i)}]$ 非零，其余的坐标元素皆为零。又因 $C_1, \cdots, C_m$ 是互不相交的，所以 $X_1, \cdots, X_m$ 是线性无关的，依几何重数的定义知：特征值 1 的几何重数大于或等于 m，即不小于 m。

反之，再证 P 的特征值 1 的几何重数不大于 m。为此，只要证明：对应于特征值 1 的任何一个左特征向量 Y，即 $YP=Y$，此 Y 总能表成 X_i，$i=1, \cdots, m$ 的线性组合即可。反复应用式 $YP=Y$ 以及归纳法知：对任意的正整数 n，都有 $YP^n=Y$，若记 $Y=[y_1, \cdots, y_N]$，则 $\sum\limits_{k=1}^{N} y_k p_{kj}^{(n)}=y_j$，$j=1, \cdots, N$，$n=1, 2, \cdots$。如果状态 j 是非常返的，由Ⅱ. 定理 1 可推知 $y_j=0$，于是 $YP=Y$ 可改写成

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in C_i} y_k p_{kj} = y_j, \qquad j\in\bigcup_{i=1}^{m} C_i。$$

如果状态 k，j 分别属于不同的不可分闭子集，则 $p_{kj}=0$，于是上式又可改写成

$$\sum_{k\in C_i} y_k p_{kj} = y_j, \quad j\in C_i, \quad i=1, \cdots, m, \tag{84}$$

若将 X 限制在 C_i 上考虑，则便是一个不可分的所有状态都是正常返的有限齐次马氏链。在不计常数因子的前提下，对每个 $i=1, \cdots, m$，

$$\sum_{k\in C_i} y_k p_{kj} = y_j, \qquad j\in C_i \tag{85}$$

都有唯一解。从而得到 $y_k=a_i x_k^{(i)}$，$k\in C_i$，a_i 是某常数，$i=1, \cdots, m$，即 $Y=\sum\limits_{i=1}^{m} a_i X_i$。定理证完。

定理 17 设 P 是不可分有周期 d 的有限齐次马氏链 X 的转移概率矩阵，则 d 次单位根都是 P 的特征值。进而，这些特征值中的每一个的几何重数为 1，并且再没有其它模为 1 的特征值。

定理 17 的详细证明可参阅文献［12］，这里不作论述。

定理 18 设 P 是有限齐次马氏链 X 的转移概率矩阵，则任何一个模为 1 的 P 的特征值是一个单位根。d 次单位根为 P 的特征值的充要条件是 P 有一个周期为 d 的常返状态类。每个 d 次单位根的几何重数恰好是周期为 d 的常返状态类的个数。

证 因为 $\lambda X=XP$，所以 $\lambda^2X=\lambda(\lambda X)=\lambda(XP)=(\lambda X)P=(XP)P=XP^2$。由归纳法，对任何正整数 n 有

$$\lambda^n X = XP^n，或 \lambda^N x_j = \sum_{k=1}^{N} x_k p_{kj}^{(n)}, \qquad j=1, \cdots, N。 \tag{86}$$

如果状态 j 是非常返的，应用Ⅲ．定理 1，并注意到 $|\lambda|=1$，在式 (86) 的两边，令 $n\to\infty$，便得 $x_j=0$。所以我们可以仅局限在 S 的不可分闭子集上讨论，并将前面的定理分别应用到每个不可分闭子集上，便可证得本定理。

§3 计算大马尔科夫链的平稳分布的聚集状态法

对一个用有限齐次马氏链 $X=\{X_n, n=0,1,\cdots\}$来刻画其统计特性的实际系统，为了探讨它的稳定性能，需要建立各种方法来计算 X 的平稳分布[22]，然而当它是一个状态个数相当多的大系统时，计算是十分复杂的，为了克服这一困难，一种行之有效的办法是将该系统的全部状态按照一定的规则进行划分，聚集为较少的几个超状态，把大马尔科夫系统分解成若干个较小的马尔科夫系统来计算的单一输入超状态分解方法[24]。本节将对这种在理论与实际应用上都具有较高价值的方法作一介绍。

定义 设 X 的状态空间为 $S=\{1,\cdots,N\}$，S 的每个真子集都称为 X 的一个超状态(Superstate)。而 X 的**单一输入超状态** (Single input superstate) 是具有如下性质的一个 X 的超状态，它只含有唯一的一个这样的状态，从不包含在此超状态中的其它任一状态出发，转移到此超状态中时，只有转移到该状态的一步转移概率才可能是正的。于是，若状态集 $E=\{1,\cdots,M\}$ $(M<N)$ 是一个具有单一输入状态 1 的单一输入超状态，则对所有 $j\in S-E$ 及 $i\in E-\{1\}$，都有一步转移概率 $p_{ji}=0$。

依照单一输入超状态的定义，由单个状态构成的超状态，总可看作是单一输入超状态，然而这是一种平凡的情形，无实际意义，不予考虑，因此作如下规定：

(A) 每个单一输入超状态至少含有 2 个状态。

以 $P=[p_{ij}]$ 为一步转移概率矩阵的有限齐次马氏链 X 的状态空间 S 若能分解成 2 个以上的互不相交的单一输入超状态之并，则称此 X 是**单一输入超状态可分解的马氏链**。为简便起见，我们可在 S 上定义一等价关系如下：如果状态 i 与 j 属于同一个超状态，则称 i 与 j 等价，记作 $i\sim j$。于是，对单一输入超状态可分解马氏链的状态 r、i、j、k，若 $i\neq j$，$i\sim j$，$r\not\sim i$，$p_{ri}>0$，$k\not\sim j$，则 $p_{kj}=0$。

对单一输入超状态可分解的马氏链 X 的全部 N 个状态，只要适当地重新改变状态的编号，那么 X 的原来的转移概率矩阵 P 最多经过 $N-1$ 次行对换与 $N-1$ 次列对换就可相应地化成下列规范的分块矩阵的形式：

$$P=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc:cccc} A_1 & 0 & \cdots & 0 & B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m & B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \\ \hdashline C_1 & 0 & \cdots & 0 & D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1m} \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 & D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_m & D_{m1} & D_{m2} & \cdots & D_{mm} \end{array}\right] \tag{87}$$

其中 m 表示 S 中的全部 N 个状态被划分成 m 个互不相交的单一输入超状态 S_1，S_2，$\cdots$，S_m 之并。对任一 j：$j=1$，$\cdots$，m，如果单一输入超状态 S_j 恰含有 N_j 个状态，那么 A_j 是$(N_j-$

1)×(N_j－1)方阵，C_j 是 1×(N_j－1)矩阵，又对任何 $i,j=1,\cdots,m$，B_{ij}是(N_i－1)×1 矩阵，D_{ij}是 1×1 矩阵。在式(87)中新编序号为 $N-m+j(j=1,\cdots,m)$的状态就是含在单一输入超状态 S_j 中的那个唯一的单一输入状态，而每个 $A_j(j=1,\cdots,m)$就是除去新编序号为 $N-m+j$ 的单一输入状态之外，在单一输入超状态 S_j 内，其它所有状态之间的一步转移概率方阵。C_j 是从新编序号为 $N+m+j$ 的单一输入状态到单一输入超状态 S_j 中其它状态的一步转移概率行向量。容易理解，对 i，$j=1$，…，m，$i\neq j$，B_{ij}与 D_{ij}所表示的是 m 个单一输入超状态 S_1，…，S_m 之间的一步转移概率，B_{ij}与 D_{ij}中的元素可以都是非零即正的。

例 5　设有限齐次马氏链 X 的状态空间为 {1，2，…，9}，一步转移概率矩阵 P 如下：

$P=$ (88)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.3	0.2						0.5	0
2	0	0						0.7	0.3
3			0	0.5			0.5		
4			1	0			0		
5					0	0.5			0.5
6					1	0			0
7	0.5	0.5							
8			0.3	0.3			0.4		
9					0.2	0.3		0.5	

式(88)右方矩阵中空白处的元素皆为零。此 X 是单一输入超状态可分解的马氏链。具体的分解形式参见图 3：

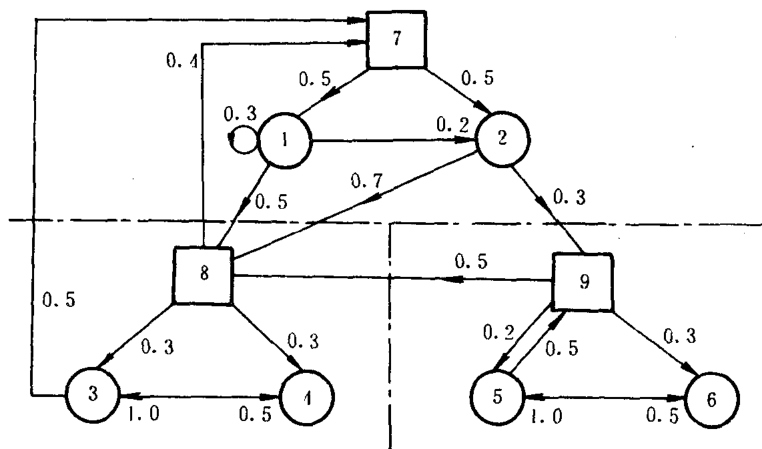


图 3　单一输入超状态分解之一

图 3 不仅形象地表现了 X 的所有状态之间相互转移的统计规则，而且指明了全部状态被划分成 3 个单一输入超状态：$S_1=\{1,2,7\}$，$S_2=\{3,4,8\}$，$S_3=\{5,6,9\}$，其中状态 7，8，9 分别依次是 S_1、S_2、S_3 中的单一输入状态。

现在就来给出单一输入超状态可分解大马氏链平稳分布的具体算法，以及它的思路、步骤与论证。

设 X 是单一输入超状态可分解马氏链，X 不可分，其状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$，转移概率矩阵 P 已写成如式(87)所示的规范形式，以 $\pi=[\pi_1,\cdots,\pi_N]$ 表示 X 的平稳分布。S 已被

划分成 m 个单一输入超状态 S_r，$r=1$，…，m 的不交之并。每个 S_r 含有 N_r 个状态，$r=1$，…，m。

第一步，首先对每个超状态 S_r ($r=1$，…，m)，我们更改所有离开此 S_r 的转移，将它们都变为返回到 S_r 中单一输入状态的转移，即由式(87)在每个超状态 S_r 内都定义了一个新的 $N_r\times N_r$ 转移概率矩阵

$$\hat{P}_r=\begin{bmatrix} A_r & \sum_{q=1}^{m} B_{rq} \\ C_r & \sum_{q=1}^{m} D_{rq} \end{bmatrix},\qquad r=1,\cdots,m, \tag{89}$$

这相当于在每个 S_r 内新定义了一个小(N_r 个状态)马氏链，记 $\hat{P}_r$ 的平稳分布是 $[\phi_r, \phi_{rr}]$，$r=1$，…，m，ϕ_{rr} 对应于 S_r 中的单一输入状态，ϕ_r 对应于 S_r 中其余的 N_r-1 个状态。

第二步，其次将每个超状态看作一个"状态"，通过对前面所得的平稳分布 $[\phi_r, \phi_{rr}]$，$r=1,\cdots,m$ 进行适当加权的办法，可以构造出在这 m 个"状态"(即超状态)之间的 $m\times m$ 转移概率矩阵 $\widetilde{P}=[\widetilde{p}_{ij}]$，

$$\widetilde{p}_{ij}=\begin{cases}\phi_i B_{ij}+\phi_{ii}D_{ij}, & i\neq j,\\ 1-\sum\limits_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{m}(\phi_i B_{ir}+\phi_{ii}D_{ir}), & i=j,\end{cases}\qquad i,j=1,\cdots,m, \tag{90}$$

因为每个 $[\phi_r, \phi_{rr}]$ 是概率分布，以及式(87)，易验证式(90)确定的 $\widetilde{P}=[\widetilde{p}_{ij}]$ 是一随机矩阵。这相当于把每个超状态当作一个"状态"后而产生的一个 m 个"状态"的马氏链，记 $\widetilde{\pi}=[\widetilde{\pi}_1$，…，$\widetilde{\pi}_m]$ 是 $\widetilde{P}$ 的平稳分布。

第三步，将所有相应于超状态内的平稳分布 $[\phi_r, \phi_{rr}]$ 与相应于超状态之间的平稳分布 $[\widetilde{\pi}_1$，…，$\widetilde{\pi}_m]$ 作"积"，即 $[\widetilde{\pi}_1\phi_1$，$\widetilde{\pi}_2\phi_2$，…，$\widetilde{\pi}_m\phi_m$，$\widetilde{\pi}_1\phi_{11}$，$\widetilde{\pi}_2\phi_{22}$，…，$\widetilde{\pi}_m\phi_{mm}]$，便是原马氏链 X 或 P 的平稳分布。下面的定理将对此作出严格的证明。

定理 19 设 X 是不可分齐次的单一输入超状态可分解马氏链，其状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$ 已被划分为 m 个单一输入超状态 S_r，$r=1$，…，m 的不交并，S_r 含 N_r 个状态，又转移概率矩阵 P 已表示成式(87)的规范形式。如果记 X 的平稳分布为 $\pi=[\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N]$，沿用前面已给的符号，则

$$\begin{aligned}\pi&=[\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N]\\ &=[\widetilde{\pi}_1\phi_1,\widetilde{\pi}_2\phi_2,\cdots,\widetilde{\pi}_m\phi_m,\widetilde{\pi}_1\phi_{11},\widetilde{\pi}_2\phi_{22},\cdots,\widetilde{\pi}_m\phi_{mm}]。\end{aligned} \tag{91}$$

证 首先指出：因为 X 是不可分的有限齐次马氏链，所以由定理 7 或 Ⅱ. 定理 11 之推论知 X 必有唯一的平稳分布 $\pi=[\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N]$。

若记

$$i_r=\begin{cases}1, & r=1,\\ \left[\sum\limits_{q=1}^{r-1}(N_q-1)\right]+1=\sum\limits_{q=1}^{r-1}N_q-(r-1)+1=\sum\limits_{q=1}^{r-1}N_q-r+2, & r=2,\cdots,m。\end{cases} \tag{92}$$

由式(87)，第 r 个超状态 $S_r=(r=1,\cdots,m)$ 是由编序号为 i_r，i_r+1，…，i_r+N_r-2 及 $N-m+r$ 的 N_r 个状态所构成。

又令

$$\psi_r = [\pi_{i_r}, \pi_{i_r+1}, \cdots, \pi_{i_r+N_r-2}], \quad \psi_{rr} = \pi_{N-m+r}, \qquad r = 1, \cdots, m。 \tag{93}$$

为证本定理，只要证得下式即可：

$$[\psi_r, \psi_{rr}] = \tilde{\pi}_r[\phi_r, \phi_{rr}], \qquad r = 1, \cdots, m。 \tag{94}$$

因为$[\phi_r, \phi_{rr}]$是 $\hat{P}_r$ 的平稳分布，以及平稳分布的定义，应有$[\phi_r, \phi_{rr}]\hat{P}_r = [\phi_r, \phi_{rr}]$，$r=1, \cdots, m$，故

$$\phi_r A_r + \phi_{rr} C_r = \phi_r, \qquad r = 1, \cdots, m。 \tag{95}$$

对原马氏链 X 而言，因为 π 是 P 的平稳分布，所以应有

$$\psi_r A_r + \psi_{rr} C_r = \psi_r, \qquad r = 1, \cdots, m。 \tag{96}$$

又因为假设 X 是不可分的，即 S 中的任一状态子集都不可能构成闭集，所以 $I-A_r$ 是非奇异的，于是从式 (95)、(96) 可得

$$\phi_r = \phi_{rr} C_r (I - A_r)^{-1}, \qquad r = 1, \cdots, m, \tag{97}$$

$$\psi_r = \psi_{rr} C_r (I - A_r)^{-1}, \qquad r = 1, \cdots, m, \tag{98}$$

值得注意的是 $\phi_{rr} \neq 0$ ($r=1, \cdots, m$)，倘若 $\phi_{rr}=0$，由式 (97) 得 ϕ_r 为 N_r-1 维的零向量，即$[\phi_r, \phi_{rr}]$为零向量，这与$[\phi_r, \phi_{rr}]$是平稳分布矛盾，故 $\phi_{rr} \neq 0$，$r=1, \cdots, m$。从而可令 $a_r = \psi_{rr}/\phi_{rr}$，$r=1, \cdots, m$，由此及式 (97)、(98) 便得

$$[\psi_r, \psi_{rr}] = a_r[\phi_r, \phi_{rr}], \qquad r = 1, \cdots, m, \tag{99}$$

为了完成本定理的证明，比较式 (94) 与(99)，只需再证 $a_r = \tilde{\pi}_r$，$r=1, \cdots, m$，就足够了。

依照式 (93) 及假设，$[\psi_1, \cdots, \psi_m, \psi_{11}, \cdots, \psi_{mm}] = [\pi_1, \cdots, \pi_N]$ 是 X 的或 P 的平稳分布，并应用式 (99) 便有

$$\psi_{rr} = \sum_{q=1}^{m} [\psi_q B_{qr} + \psi_{qq} D_{qr}], \qquad r = 1, \cdots, m,$$

$$a_r \phi_{rr} = \sum_{q=1}^{m} [a_q \phi_q B_{qr} + a_q \phi_{qq} D_{qr}], \qquad r = 1, \cdots, m。 \tag{100}$$

既然$[\phi_r, \phi_{rr}]$是 $\hat{P}_r$ 的平稳分布，那么也有

$$\phi_{rr} = \phi_r \sum_{q=1}^{m} B_{rq} + \phi_{rr} \sum_{q=1}^{m} D_{rq}, \qquad r = 1, \cdots, m。 \tag{101}$$

将式 (101) 代入式(100) 的左方，并抵消等式两边 $q=r$ 的相同项，可得

$$a_r\Big[\phi_r \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq r}}^{m} B_{rq} + \phi_{rr} \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq r}}^{m} D_{rq}\Big] = \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq r}}^{m} [a_q \phi_q B_{qr} + a_q \phi_{qq} D_{qr}], \quad r = 1, \cdots, m。 \tag{102}$$

根据 $\tilde{p}_{ij}$的定义式(90)，式(102)的左方为 $a_r \sum\limits_{\substack{q=1 \\ q\neq r}}^{m} \tilde{p}_{rq} = a_r(1-\tilde{p}_{rr})$，式(102)的右方为$\sum\limits_{\substack{q=1 \\ q\neq r}}^{m} a_q \tilde{p}_{qr}$，代入式(102)得

$$a_r = a_r \tilde{p}_{rr} + \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq r}}^{m} a_q \tilde{p}_{qr} = \sum_{q=1}^{m} a_q \tilde{p}_{qr}, \qquad r = 1 \cdots, m,$$

即

$$[a_1, \cdots, a_m] = [a_1, \cdots, a_m]\tilde{P}。 \tag{103}$$

因为对任何 $r=1, \cdots, m$，ψ_{rr}、ϕ_{rr}都非负，从而 a_r 非负。

对任何 $r=1, \cdots, m$，若记 e_r 为元素都是 1 的 N_r 维列向量，因$[\phi_r, \phi_{rr}]$是一平稳分布，故$[\phi_r, \phi_{rr}]e_r = 1$，从而由式(99)得

$$\sum_{r=1}^{m} a_r = \sum_{r=1}^{m} a_r[\phi_r, \phi_{rr}]e_r = \sum_{r=1}^{m}[\phi_r, \phi_{rr}]e_r$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\pi_i = 1。$$

综上所述，$[a_1, \cdots, a_m]$ 是 $\tilde{P}$ 的平稳分布。

因为 X 不可分，S 中任何两个状态互通，所以 $\{S_r, r=1,\cdots,m\}$ 中任何两个单一输入超状态之间也互通，由此可见 $\tilde{P}$ 有唯一的平稳分布，既然唯一，那么 $a_r=\tilde{\pi}_r$，$r=1$，…，m。定理证完。

定理 19 的意义在于通过对 $m+1$ 个相应于 $\hat{P}_r$，$r=1$，…，m，$\tilde{P}$ 的小马氏链平稳分布的简便计算，求得了相应于 P 的大马氏链的平稳分布。回避了因“大”而带来的困难，起到了化整为零的作用。

一般说来，当不可分有限齐次马氏链 X 的状态空间 S 划分成 m 个超状态的不交之并时，这一划分未必是单一输入超状态分解。即未必能满足定理 19 的假设条件。为了对一般的不可分有限齐次马氏链 X 都能运用定理 19，试图通过扩大状态空间的方法，按照一定方式构造出一个单一输入超状态可分解的马氏链 Y，使得 Y 的平稳分布中已隐含有原马氏链 X 的平稳分布，对 Y 可使用定理 19 算得平稳分布，从而达到了求原链 X 的平稳分布的目的。下面的定理实现了上述意图。

定理 20 设 X 是不可分有限齐次马氏链，X 的状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$ 已被划分为 m 个超状态 S_1，…，S_m 的不交之并。对 $r=1$，…，m，$S_r=\{i_r, i_r+1,\cdots,i_r+N_r-1\}$，其中 i_r 由式(92)所定义。X 的转移概率矩阵为 $P=[p_{ij}]$，其唯一的平稳分布记作 $\pi=[\pi_1,\cdots,\pi_N]$。现在构造 $N\times N$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$，$N\times m$ 矩阵 $B=[b_{ij}]$，$m\times N$ 矩阵 $C=[c_{ij}]$如下：

对 i，$j\in S=\{1, \cdots, N\}$，

$$a_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & \text{当 } i\sim j \text{ 即 } i \text{ 与 } j \text{ 属于同一个超状态，} \\ 0, & \text{当 } i\not\sim j。\end{cases} \tag{104}$$

对 $i\in S, j\in\{N+1,\cdots,N+m\}$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \in S_{j-N}, \\ \sum\limits_{r\in S_{j-N}} p_{ir}, & \text{当 } i \notin S_{j-N}。\end{cases} \tag{105}$$

对 $i\in\{N+1,\cdots,N+m\}$，$j\in S$，

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{l\notin S_{i-N}} \pi_l p_{lj}}{\sum\limits_{r\in S_{i-N}} \sum\limits_{l\notin S_{i-N}} \pi_l p_{lr}}, & \text{当 } j \in S_{i-N}, \\ 0 & \text{当 } j \notin S_{i-N}。\end{cases} \tag{106}$$

又作$(N+m)\times(N+m)$矩阵

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}。 \tag{107}$$

再令

$$\pi_j^* = \sum_{r\in S_{j-N}} \sum_{l\notin S_{j-N}} \pi_l p_{lr}, \qquad j = N+1,\cdots,N+m, \tag{108}$$

$$\pi^* = [\pi_{N+1}^*,\cdots,\pi_{N+m}^*], \bar{\pi} = [\pi, \pi^*], \tag{109}$$

则
$$\bar{\pi}=\bar{\pi}\bar{P}。\tag{110}$$

注　从上面的构造式(104)－(107)容易验证$\bar{P}$是随机矩阵，并可看出$\bar{P}$对应于一个有$N+m$个状态$\{1, \cdots, N, N+1, \cdots, N+m\}$的单一输入超状态可分解的马氏链$Y$，它是对原马氏链$X$的每个超状态$S_r$ $(r=1, \cdots, m)$添入一个单一输入状态$N+r$而构成。矩阵A表示在原链X的每个超状态内的转移概率规律仍保持不变。矩阵B反映了转移出原超状态的概率规律。矩阵C反映的是从添入的单一输入状态到原超状态的转移规律。定理20给出了相应于$\bar{P}$的$\bar{\pi}$与P的平稳分布π之间的隐含结构关系。

证　首先证
$$\bar{\pi}\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}=[\pi_1,\cdots,\pi_N,\pi^*_{N+1},\cdots,\pi^*_{N+m}]\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}=[\pi_1,\cdots,\pi_N]=\pi\quad。\tag{111}$$

对任何$j=1, \cdots, N$，由式(104)、(108)、(106)，
$$\begin{aligned}&[\pi_1,\cdots,\pi_N,\pi^*_{N+1},\cdots,\pi^*_{N+m}][a_{1j},\cdots,a_{Nj},c_{N+1j},\cdots,c_{N+mj}]'\\&=\sum_{l=1}^{N}\pi_l a_{lj}+\sum_{i=N+1}^{N+m}\pi_i^* c_{ij}\\&=\sum_{\substack{l=1\\l\sim j}}^{N}\pi_l p_{lj}+\sum_{\substack{i=N+1\\i-N\sim j}}^{N+m}\Big(\sum_{l\notin S_{i-N}}\pi_l p_{lj}\Big)\\&=\sum_{\substack{l=1\\l\sim j}}^{N}\pi_l p_{lj}+\sum_{\substack{l=1\\l\not\sim j}}^{N}\pi_l p_{lj}=\sum_{l=1}^{N}\pi_l p_{lj}=\pi_j\quad。\end{aligned}$$

式(111)得证。其次由式(105)、(108)，
$$\begin{aligned}\bar{\pi}\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}&=[\pi_1,\cdots,\pi_N,\pi^*_{N+1},\cdots,\pi^*_{N+m}]\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}\\&=\Big[\sum_{\substack{i=1\\i\notin S_1}}^{N}\pi_i\Big(\sum_{r\in S_1}p_{ir}\Big),\cdots,\sum_{\substack{i=1\\i\notin S_m}}^{N}\pi_i\Big(\sum_{r\in S_m}p_{ir}\Big)\Big]\\&=[\pi^*_{N+1},\cdots,\pi^*_{N+m}]。\end{aligned}\tag{112}$$

综合式(111)与(112)便得式(110)，定理证完。

需要指出的是，若记$\bar{\pi}=[\bar{\pi}_1,\cdots,\bar{\pi}_N,\bar{\pi}_{N+1},\cdots,\bar{\pi}_{N+m}]$，
$$\bar{\pi}_i=\begin{cases}\pi_i, & 当\ i=1,\cdots,N\\ \pi_i^*, & 当\ i=N+1,\cdots,N+m。\end{cases}$$

因$[\pi_1, \cdots, \pi_N]$是概率分布，所以$\sum_{i=1}^{N+m}\bar{\pi}_i$未必等于1。反之，如果利用定理19求得$Y$的平稳分布$\bar{\pi}=[\bar{\pi}_1, \cdots, \bar{\pi}_{N+m}]$，那么$\sum_{i=1}^{N+m}\bar{\pi}_i=1$，而$\sum_{i=1}^{N}\bar{\pi}_i$未必等于1，这时应取$\Big[\bar{\pi}_1/\sum_{i=1}^{N}\bar{\pi}_i, \cdots, \bar{\pi}_N/\sum_{i=1}^{N}\bar{\pi}_i\Big]$为原马氏链$X$的平稳分布。

应用定理19和定理20进行计算的实例，以及有关算法和计算次数的讨论可参看文献[24]。

最后再提出几个与聚集状态法有关的问题，并列举出若干初步的研究结果，它们的证明可见[23]。

试问：任何单一输入超状态可分解马氏链的分解方式是否唯一？回忆例5及图3，现在

不改变图 3 所示的状态转移的概率结构，只把原编号为 2、7、9 的状态重新分别依次改换

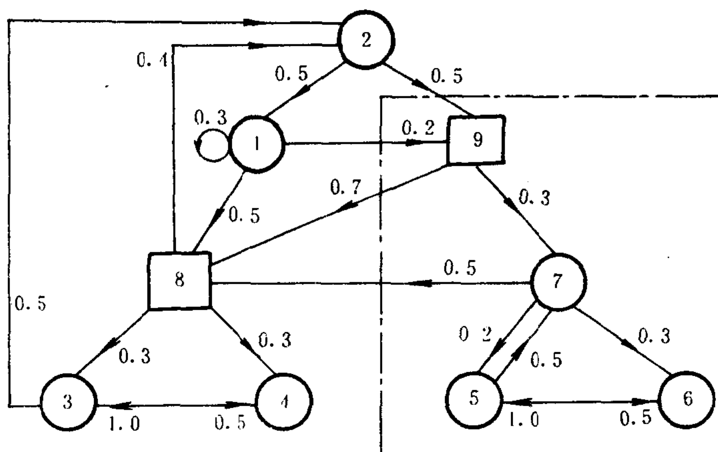


图 4 单一输入超状态分解之二

编号为 9、2、7，其余的状态编号保持不变，这样就得到了状态转移概率图 4。在图 4 中，9 个状态被分解成 2 个单一输入超状态：$S_1'=\{1, 2, 3, 4, 8\}$，$S_2'=\{5, 6, 7, 9\}$ 的不交并，编号为 8、9 的状态分别依次是 S_1'、S_2' 中的单一输入状态。由此可见，单一输入超状态可分解马氏链的分解方式一般是不唯一的。那么，附加上什么条件可使分解是唯一的呢？为此下面给出条件(B)及相应的结论。

(B) 对单一输入超状态可分解的马氏链，在它的每个单一输入超状态中，从唯一的单一输入状态出发，到此超状态中其它各个状态的一步转移概率皆为正值。

定理 21 对任何单一输入超状态可分解马氏链，在条件 (A)、(B) 之下，则

(i) 任何两个单一输入超状态不可能合并为一个单一输入超状态。

(ii) 任何一个单一输入超状态不可能分解成两个以上的单一输入超状态的不交并。

定理 22 对任何单一输入超状态可分解马氏链，它的状态空间 S 含有 N 个状态，并被分解为 m 个单一输入超状态 $S_1, \cdots, S_m$ 的不交并，每个 S_r 含有 N_r 个状态，$r=1, \cdots, m$，在条件(A)，(B)以及 $N-\max\limits_{1\leqslant r\leqslant m} N_r>2m$ 之下，对任何超状态 $S' \subset S$，如有 q，r $(=1, \cdots, m)$，$q\neq r$，使得 $S'\cap S_q\neq\varnothing$ 且 $S'\cap S_r\neq\varnothing$，则此 S' 不可能是单一输入超状态。

定理 21 与定理 22 给出了单一输入超状态可分解马氏链分解唯一的充分条件，这些条件不仅显得自然，而且在实际问题中常能满足。

试问：对已给的有限齐次马氏链 X，如何判断它能否直接作单一输入超状态分解？为此，初步地建立了可用来判别的不等式；以 n 记转移概率矩阵中非零元素的个数，记 $u=\min\limits_{1\leqslant r\leqslant m} N_r$，$W=\max\limits_{1\leqslant r\leqslant m} N_r$，其它全都沿用前面已给的符号。如果 X 是单一输入超状态可分解的，则

$$4m^2-(N+4)m+n+N-N^2\leqslant 0, \tag{113}$$

$$4Nm^2-4(N+n)m+\left[\sqrt{\frac{W}{u}}+\sqrt{\frac{u}{W}}\right]^2 N^2\geqslant 0, \tag{114}$$

即式 (113)、(114) 是单一输入超状态可分解马氏链的参数 N、m、n、u、W 必须满足的关系式。一旦式 (113) 或(114) 不成立，即可断言此马氏链是不能作单一输入超状态分解的。

既然单一输入超状态可分解马氏链的分解方式不唯一，那就应当择优选取其中的一种方式。为此，首先必须建立衡量分解优劣的标准，是以上机计算平稳分布编程难易，所费机时多少，计算快慢为准则呢？或是另有其它更便于使用的有意义的准则呢？在确定的标准下，分解成几个单一输入超状态为宜？每个单一输入超状态含有多少个状态为宜？分解中状态之间按什么方式搭配为宜？此外，还需要创立更精细更有效的方法去鉴别怎样的马氏链才能作单一输入超状态分解，这一系列问题都有待继续深入探讨。

第五章　有限非齐次马尔科夫链

在实践中所遇到的马尔科夫随机系统，它的转移概率矩阵常常是随时间而异的，为了更加如实地描述客观现象，获得更加逼真的结果，必然导致非齐次情形的研究。但是，由于前提条件放宽到了较一般的非齐次情形，这便大大地增加了研究对象的复杂程度与解决问题的难度。因此，与齐次马氏链已经取得的丰硕且深刻的成果相比，显得相当不足，故非齐次马氏链至今仍是有待深入研究的重要论题。本章仅对非齐次马氏链转移概率的渐近性质展开讨论，在不损失主要内容实质的前提下，为了使分析、推导、叙述简单起见，我们只考虑状态空间 S 是有限集的情形，对 S 是可列集的一般情形可参看文献 [13]。

§1　基 本 概 念

设 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是取值于 $S=\{1,\cdots,N\}$ 的随机变量序列，沿用第一章中已定义的符号 $q_i\triangleq P(X_0=i),i\in S,{}_nP^{(m)}\triangleq[p_{ij}(n,n+m)]$。

$$p_{ij}(n,n+m)\triangleq P(X_{n+m}=j|X_n=i),i,j\in S,n,m\geqslant 0。$$

这里当然要求 $P(X_n=i)>0$。特别地，记 ${}_nP^{(1)}$ 为 ${}_nP$。如果对任意的非负整数 n，以及任意的状态 $i_0,\cdots,i_{n+1}\in S$，总有

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n)\\=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)=p_{i_ni_{n+1}}(n,n+1),\end{aligned}\tag{1}$$

则称此 X 是具有初始分布 $\{q_i\}$ 及转移概率矩阵列 ${}_nP$，$n=0$，1，…**的有限非齐次马氏链**。式 (1) 即为**马氏性**的数学定义。

只要回顾 I．定理 3，I．定理 2，仔细考察 I．定理 1，便知存在定理、C-K 方程、马氏性的各种等价定义形式等在非齐次情形下仍都成立。虽然非齐次马氏链与齐次马氏链一样都具有马氏性，但是齐次马氏链的概率特征仅由它的初始分布与一个（一步）转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$ 所确定，而非齐次马氏链却要由它的初始分布与一列在各个时刻 n 的一步转移概率矩阵 ${}_nP$，$n=0$，1，…才能确定它的概率特征。正因为如此，导致了非齐次马氏链与齐次马氏链的许多显著差异。例如强马氏性在非齐次情形下不仅变得复杂，而且具有与齐次情形下的不同结论。

设 τ 是有限非齐次马氏链 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的有限停时，即 τ 是取非负整数为值的随机变量，而且对任何非负整数 n 都有 $\{\tau=n\}\in\mathscr{F}(X_0,\cdots,X_n)$。又记 $\mathscr{F}_\tau\triangleq\{A:A\cap\{\tau=n\}\in\mathscr{F}(X_0,\cdots,X_n),n=0,1,\cdots\}$，称 $\mathscr{F}_\tau$ 为 τ **前 σ-代数**。对任一随机事件 B，$P(B|\mathscr{F}_\tau)$ 表示按下述方式取值的随机变量，即对随机事件 $\{X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n,\tau=n\}(i_0\cdots,i_n\in S,n=0,1,\cdots)$ 中的所有样本点，$P(B|\mathscr{F}_\tau)$ 取值为

$$P(B|\mathscr{F}_\tau) = P(B|X_0 = i_0,\cdots,X_n = i_n,\tau = n)。\tag{2}$$

所谓 X 具有强马氏性，即对任何 X 的有限停时 τ，任何非负整数 n，及任何状态 $j\in S$，

$$P(X_{\tau+n} = j|\mathscr{F}_\tau) = p_{X_\tau j}(\tau,\tau+n),\tag{3}$$

总是以概率 1 成立。下面的例子证实了与齐次情形不同，在非齐次的情形下具有强马氏性的 X 不能保证 $\{X_{\tau+n},n = 0,1,\cdots\}$ 是一马氏链。

例 1　设 X 是有限非齐次马氏链，X 的状态空间 $S = \{0,1\}$，初始分布为 $\{q_0 = 1/2，q_1 = 1/2\}$，在时刻 0，1，2 的转移概率矩阵分别依次为

$$_0P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\qquad {}_1P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}\end{array},\qquad {}_2P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array},$$

其它时刻的转移概率矩阵 $_nP$，$n=3，4，\cdots$完全任意，令 $\tau=X_0$，易验证此 τ 是 X 的有限停时，定义

$$Y_n = X_{\tau+n},\qquad n = 0,1,\cdots,\tag{4}$$

由式 (4) 及马氏性，

$$\begin{aligned}P(Y_0 = 0,Y_1 = 0) &= \sum_{i=0}^{1}P(X_0 = i,Y_0 = 0,Y_1 = 0)\\ &= P(X_0 = 0,X_1 = 0) + P(X_0 = 1,X_1 = 0,X_2 = 0)\\ &= P(X_0 = 0)p_{00}(0,1) + P(X_0 = 1)p_{10}(0,1)p_{00}(1,2) = 1/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y_0 = 0,Y_1 = 0,Y_2 = 0) &= P(X_0 = 0,X_1 = 0,X_2 = 0)\\ &\quad + P(X_0 = 1,X_1 = 0,X_2 = 0,X_3 = 0) = 1/4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y_1 = 0) &= \sum_{i=0}^{1}P(X_0 = i,Y_1 = 0) = P(X_0 = 0,X_1 = 0) + P(X_0 = 1,X_2 = 0)\\ &= 1/2 + 1/4 = 3/4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y_1 = 0,Y_2 = 0) &= P(X_0 = 0,X_1 = 0,X_2 = 0) + P(X_0 = 1,X_2 = 0,X_3 = 0)\\ &= 1/4 + 1/4 = 1/2,\end{aligned}$$

从而，$P(Y_2 = 0|Y_0 = 0,Y_1 = 0) = 1/2$，$P(Y_2 = 0|Y_1 = 0) = 2/3$ 两者不等说明 $\{Y_n,n = 0,1,\cdots\}$ 不是马氏链。

此外，非齐次马氏链的状态分类问题也还没有像齐次情形那样得到彻底的解决，值得进行深入研究。

迄今，在非齐次马氏链的研究成果中，相比之下，较多或较系统的结论是集中在遍历性方面的研究。因此本章仅对此作一概要介绍。为此需要先给出几个有用的概念。

定义　设 Π 是 $N\times N$ 随机矩阵，如果它的各行都恒相同，则称 Π 是**稳定的**。具有遍历性的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵 P 的 n 次幂 P^n 当 $n\to\infty$时是趋于一个稳定的矩阵。那么对于非齐次马氏链何时 $_mP^{(n)} = [p_{ij}(m,m+n)]$ 也趋于一个稳定的矩阵呢？这就是本章要讨论的问题。

如果我们把 $N\times N$ 随机矩阵 P 看作为 N^2 维欧氏空间中的点，那么称定义在所有 $N\times N$ 随机矩阵集 $\{P\}$ 上的，取值于 $[0,1]$ 中的任一连续函数 $\varepsilon(P)$ 为**遍历系数**。称遍历系数 $\varepsilon(P)$ **是固有的**，当且仅当对任何稳定的矩阵 P 都有 $\varepsilon(P) = 1$ 成立。对 $N\times N$ 随机矩阵 $P = [p_{ij}]$，

定义

$$\mu(P) \triangleq \max_{1\leqslant j\leqslant N}(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ij}), \quad \delta(P) \triangleq \sum_{j=1}^{N}(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ij}),$$
$$\alpha(P) \triangleq \min_{1\leqslant i,j\leqslant N}\sum_{k=1}^{N}\min(p_{ik}, p_{jk})。 \tag{5}$$

由定义式(5)，显而易见 $\mu(P)$、$\delta(P)$、$\alpha(P)$ 都是遍历系数，而且 $\delta(P)$ 与 $\alpha(P)$ 是固有的。

定理 1 $$\mu(P) \leqslant \delta(P) \leqslant \alpha(P)。 \tag{6}$$

证 因为对任何 $j=1, \cdots, N$，都有 $(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ij}) \leqslant \sum_{j=1}^{N}(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ij})$，故由式(5)知 $\mu(P) \leqslant \delta(P)$。又因对任意给定的 $i,j,k=1,\cdots,N$，有 $(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ik}) \leqslant \min(p_{ik}, p_{jk})$，从而得 $\sum_{k=1}^{N}(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ik}) \leqslant \sum_{k=1}^{N}\min(p_{ik}, p_{jk})$，既然此式对任何 $i,j=1,\cdots,N$ 都成立，那么 $\sum_{k=1}^{N}(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ik}) \leqslant \min_{1\leqslant i,j\leqslant N}\sum_{k=1}^{N}\min(p_{ik}, p_{jk})$，由式(5)此即 $\delta(P) \leqslant \alpha(P)$，式(6)得证。

称随机矩阵 P 是**马尔科夫矩阵**，当且仅当 $\mu(P) > 0$。

定理 2 不等式 $\mu(P) > 0$ 等价于 P 中至少有一列的元素全都是正的。

证 如果 $\mu(P) > 0$，由式(5)必存在 $j_0(1 \leqslant j_0 \leqslant N)$ 使得 $\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ij_0} > 0$，从而对任何 $i = 1,\cdots,N$，$p_{ij_0} > 0$，即第 j_0 列的元素全为正的。逆命题显然成立。

定理 3 不等式 $\mu(P) > 0$ 等价于不等式 $\delta(P) > 0$。

证 由式(6)，立即从 $\mu(P) > 0$ 得 $\delta(P) > 0$。反之，由 $\delta(P) > 0$ 及式 (5) 知非负项之和 $\sum_{j=1}^{N}(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ij}) > 0$，那么必有 $j_0(1 \leqslant j_0 \leqslant N)$ 使得 $(\min_{1\leqslant i\leqslant N} p_{ij_0}) > 0$，再由式(5)可断定 $\mu(P) > 0$。

回顾Ⅳ. 定理 9 的推论 2，可以发现上面的论证已经指明遍历系数 $\mu(P)$、$\delta(P)$ 都是刻画遍历性的有用特征。两者的主要不同点在于 $\mu(P)$ 不是固有的而 $\delta(P)$ 是固有的。

称随机矩阵 P 是**不规则的**，当且仅当 $\alpha(P) > 0$。由定义式 (5) 直接可得下面的判别方法。

定理 4 $\alpha(P) > 0$ 的充要条件是任何一个由 P 的两行所构成的 P 的子矩阵都至少拥有一列全为正的元素。

据式 (6)，马尔科夫矩阵必是不规则的，但是逆命题不真，例如取

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix},$$

按式(5)计算 $\alpha(P) = 1/4 > 0$，$\mu(P) = 0$，所以此 P 是不规则的，但不是马尔科夫矩阵。

注意到对任何实数 a，b，有 $\min(a, b) = 1/2\,(a+b-|a-b|)$，那么由式 (5) 及 P 是随机矩阵得

$$\begin{aligned}\alpha(P) &= \min_{1\leqslant i,j\leqslant N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}(p_{ik} + p_{jk} - |p_{ik} - p_{jk}|) \\ &= \min_{1\leqslant i,j\leqslant N}\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}|p_{ik} - p_{jk}|\right)\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\max_{1\le i,j\le N}\sum_{k=1}^{N}|p_{ik}-p_{jk}|。\tag{7}$$

若对任一实数 a，记

$$a^{+}=\begin{cases}a, & 若\ a\geqslant 0,\\ 0, & 若\ a<0,\end{cases}\qquad a^{-}=\begin{cases}0, & 若\ a\geqslant 0,\\ a, & 若\ a<0。\end{cases}$$

由 P 是随机矩阵，对任何 i，$j=1$，…，N，

$$\sum_{k=1}^{N}[(p_{ik}-p_{jk})^{+}+(p_{ik}-p_{jk})^{-}]=\sum_{k=1}^{N}(p_{ik}-p_{jk})=0,$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^{N}(p_{ik}-p_{jk})^{+}=-\sum_{k=1}^{N}(p_{ik}-p_{jk})^{-}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}|p_{ik}-p_{jk}|,$$

从而，对 $S=\{1,\cdots,N\}$ 有

$$\max_{E\subset S}\sum_{k\in E}(p_{ik}-p_{jk})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}|p_{ik}-p_{jk}|,$$

将此式代入式(7)可得 $\alpha(P)$ 的另一种表达式

$$\alpha(P)=1-\max_{1\le i,j\le N}\ \max_{E\subset S}\sum_{k\in E}(p_{ik}-p_{jk})。\tag{8}$$

下面的定理给出了 $\alpha(P)$ 的基本性质。

定理 5　对任给的两个 $N\times N$ 的随机矩阵 $P_1=[p_{ij}(1)]$，$P_2=[p_{ij}(2)]$，则

$$1-\alpha(P_1P_2)\leqslant(1-\alpha(P_1))(1-\alpha(P_2))。\tag{9}$$

当 $N=2$ 时，式(9)中的不等号"$\leqslant$"转化为等号"$=$"。

证　由式(8)

$$1-\alpha(P_1P_2)=\max_{1\le i,j\le N}\max_{E\subset S}\sum_{k\in E}\sum_{r=1}^{N}(p_{ir}(1)-p_{jr}(1))p_{rk}(2)。$$

对任何 i，$j=1$，…，N，以及任何 $S=\{1,\cdots,N\}$ 的子集 E，

$$\begin{aligned}\sum_{k\in E}\sum_{r=1}^{N}(p_{ir}(1)-p_{jr}(1))p_{rk}(2)&=\sum_{r=1}^{N}(p_{ir}(1)-p_{jr}(1))^{+}\sum_{k\in E}p_{rk}(2)\\&\quad+\sum_{r=1}^{N}(p_{ir}(1)-p_{jr}(1))^{-}\sum_{k\in E}p_{rk}(2)\\&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}|p_{ir}(1)-p_{jr}(1)|\Big[\max_{1\le r\le N}\sum_{k\in E}p_{rk}(2)-\min_{1\le r\le N}\sum_{k\in E}p_{rk}(2)\Big]\\&=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}|p_{ir}(1)-p_{jr}(1)|\max_{1\le r_1,r_2\le N}\sum_{k\in E}\big(p_{r_1k}(2)-p_{r_2k}(2)\big),\end{aligned}$$

将此式代入前式中，再利用式(7)与式(8)便得

$$\begin{aligned}1-\alpha(P_1P_2)&\leqslant\frac{1}{2}\max_{1\le i,j\le N}\sum_{r=1}^{N}|p_{ir}(1)-p_{jr}(1)|\max_{1\le r_1,r_2\le N}\max_{E\subset S}\sum_{k\in E}\big(p_{r_1k}(2)-p_{r_2k}(2)\big)\\&=(1-\alpha(P_1))(1-\alpha(P_2))。\end{aligned}$$

对于 $N=2$ 的情形，经直接计算知式(9)中等号成立。

推论　对任意的正整数 n，任意 n 个 $N\times N$ 的随机矩阵 $P_1,\cdots,P_n$，则

$$1-\alpha(P_1\cdots P_n)\leqslant(1-\alpha(P_1))\cdots(1-\alpha(P_n))。\tag{10}$$

应用定理 5 及归纳法即得推论。

注 1　考察定理 5 的证明可知：对任何 $N\times M$ 随机矩阵 P_1 与 $M\times L$ 随机矩阵 P_2，定理

5 仍然成立。特别地，如果 $P_1=[p_1(1),\cdots,p_N(1)]$ 与 $P_2=[p_1(2),\cdots,p_N(2)]$ 是两个 N 维概率分布向量，P 是 $N\times N$ 的随机矩阵。把定理 5 应用到矩阵 $P'=\begin{bmatrix}p_1(1),\cdots,p_N(1)\\ p_1(2),\cdots,p_N(2)\end{bmatrix}$ 与 P 上，便得 $1-\alpha(P'P)\leqslant(1-\alpha(P'))(1-\alpha(P))$。再用 C-K 方程与式 (7) 展开有

$$\sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{i=1}^{N}(p_i(1)-p_i(2))p_{ik}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{N}|p_k(1)-p_k(2)|(1-\alpha(P))。\tag{11}$$

注 2 以上所介绍的遍历系数等概念与有关的结论对齐次或非齐次马氏链都是适用的。

最后介绍一个非齐次马氏链的典型例子。

例 2 卜里耶 (Pólya) 坛子模型，设开始坛中装有 a 个白球和 b 个黑球，以后在每一时刻 $n=1,2,\cdots$，从坛中随机地抽取一球，取后放回坛中，并同时新增加 c 个与所取得的球同颜色的球添入坛中。若令 $X_0=0,X_n(n=1,2,\cdots)$ 表示在开头的前 n 次随机抽球中，取得白球的次数，因此 $X_n=i$ 表示在前 n 次抽球中，抽得白球共有 i 次，抽得黑球 $n-i$ 次，于是在进行第 $n+1$ 次抽球之前坛中含有白球 $a+ic$ 个，含有黑球 $b+(n-i)c$ 个。显然，在已知 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ 取值的条件下，X_{n+1}的条件概率仅依赖于 X_n 的取值。所以 $\{X_0,X_1,\cdots\}$ 是马氏链，而且，对任何 $n=0,1,\cdots$，及任何 $i=0,\cdots,n$，

$$\begin{cases}p_{ii}(n,n+1)=P(X_{n+1}=i|X_n=i)=\dfrac{b+(n-i)c}{a+b+nc},\\ p_{ii+1}(n,n+1)=P(X_{n+1}=i+1|X_n=i)=\dfrac{a+ic}{a+b+nc},\\ p_{ij}(n,n+1)=0,\qquad j\neq i,i+1。\end{cases}\tag{12}$$

如果令 $Y_0=0$,以 $Y_n(n=1,2,\cdots)$ 表示在第 n 次抽球中抽得白球的个数，显然每个 Y_n 只能取 0 或 1 为值，而且 $Y_0+\cdots+Y_n=X_n$，$n=0,1,\cdots$。若记

$$p_n=P(Y_n=1|Y_0,\cdots,Y_{n-1}),n=1,2,\cdots,$$

则

$$p_n=\frac{a+X_{n-1}c}{a+b+(n-1)c},\qquad n=1,2,\cdots,\tag{13}$$

$$p_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a+(X_{n-1}+1)c}{a+b+nc}, & \text{当 } Y_n=1,\\ \dfrac{a+X_{n-1}c}{a+b+nc}, & \text{当 } Y_n=0,\end{cases}\tag{14}$$

即对 $n=1,2,\cdots$，

$$p_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a+b+(n-1)c}{a+b+nc}p_n+\dfrac{c}{a+b+nc}, & \text{当 } Y_n=1,\\ \dfrac{a+b+(n-1)c}{a+b+nc}p_n, & \text{当 } Y_n=0。\end{cases}\tag{15}$$

关于卜里耶坛子模型的更加详细的论述可参看文献 [8]。

§2 弱遍历性

定义 称马氏链 X 是（在柯尔莫哥洛夫意义下）**弱遍历的**，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}[p_{ik}(m,m+n)-p_{jk}(m,m+n)]=0,\tag{16}$$

对任何 $m=0, 1, \cdots$，以及任何 $i, j, k \in S$ 都成立。

注 1　式(16)并不意味着当 $n\to\infty$ 时，$p_{ik}(m,m+n)$ 和 $p_{jk}(m,m+n)$ 有极限，但它表示存在着一种趋向，即对任何非负整数 m，当 $n\to\infty$ 时，矩阵 ${}_mP^{(n)}=[p_{ij}(m,m+n)]$ 中的每一行都趋于相等。

注 2　要使式（16）对任何非负整数 $m=0, 1, \cdots$ 都成立，只要存在某个给定的正整数 m_0，对所有的 $m>m_0$，式（16）成立就足够了。因为对任何非负整数 $l: 0\leqslant l\leqslant m_0<m$，以及任何 $i', j', k\in S$，由 C－K 方程与式(16)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}[p_{i'k}(l,m+n)-p_{j'k}(l,m+n)]\\
&=\lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{i=1}^{N}p_{i'j}(l,m)p_{ik}(m,m+n)-\sum_{j=1}^{N}p_{j'j}(l,m)p_{jk}(m,m+n)\Big]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{N}p_{i'i}(l,m)p_{j'j}(l,m)[p_{ik}(m,m+n)-p_{jk}(m,m+n)]\\
&=\sum_{i,j=1}^{N}p_{i'i}(l,m)p_{j'j}(l,m)\lim_{n\to\infty}[p_{ik}(m,m+n)-p_{jk}(m,m+n)]=0。
\end{aligned}$$

这就表明对任何 $l: 0\leqslant l\leqslant m_0$，在式（16）中以 l 换 m 后仍成立。换言之，即使在转移概率矩阵列 $\{{}_mP=[p_{ij}(m,m+1)], m=0,1,\cdots\}$ 中替换了有限多个随机矩阵，其弱遍历性仍保持不变。

现在讨论马氏链具有弱遍历性的充要条件。

定理 6　有限马氏链是弱遍历的充分且必要的条件是对任何非负整数 m，都有下式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha({}_mP^{(n)})=1 \tag{17}$$

证　由式(7)知式(16)与式(17)等价，定理得证。

定理 7　有限马氏链 X 是弱遍历的充要条件是存在稳定矩阵列 ${}_m\Pi^{(n)}, m=0,1,\cdots, n=1,2,\cdots$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}({}_mP^{(n)}-{}_m\Pi^{(n)})=0, \tag{18}$$

对任何 $m=0, 1, \cdots$ 都成立。

证　先证充分性。如果式(18)成立，因为每个 ${}_m\Pi^{(n)}$ 都是稳定的，于是 ${}_m\Pi^{(n)}$ 中每列元素都相等，于是第 k 列的元素都可记为 $\pi_k(m,n)$，由式（18），对任何 $i, j, k\in S$，任何 $m=0, 1, \cdots$，都有

$$\lim_{n\to\infty}(p_{ik}(m,m+n)-\pi_k(m,n))=0, \quad \lim_{n\to\infty}(p_{jk}(m,m+n)-\pi_k(m,n))=0,$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}[p_{ik}(m,m+n)-p_{jk}(m,m+n)]&=\lim_{n\to\infty}[p_{ik}(m,m+n)-\pi_k(m,n)]\\
&\quad-\lim_{n\to\infty}[p_{jk}(m,m+n)-\pi_k(m,n)]=0,
\end{aligned}$$

依定义 X 是弱遍历的。

再证必要性。若 X 是弱遍历的，对任何 $m=0, 1, \cdots, n=1, 2, \cdots$，及任何 $k\in S$，令

$$\pi_k(m,n)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}p_{ik}(m,m+n), \tag{19}$$

第 k 列的元素都是 $\pi_k(m,n)$ 的 $N\times N$ 矩阵记作 ${}_m\Pi^{(n)}$，易验证此 ${}_m\Pi^{(n)}$ 是稳定的。对任何

$m=0, 1, \cdots$，任何 $j, k\in S$，由式(19)、式(16)有

$$\lim_{n\to\infty}[p_{jk}(m,m+n)-\pi_k(m,n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[p_{jk}(m,m+n)-p_{ik}(m,m+n)]=0$$

即式(18)成立，定理证完。

推论 有限马氏链 X 是弱遍历的充要条件是对所有的 $m=0, 1, \cdots$，转移概率矩阵序列 $\{_mP^{(n)}, n=1,2,\cdots\}$ 的任何收敛子序列的极限都是稳定矩阵。

证 必要性。设 X 是弱遍历的，由定理 7 式(18)成立。对任一固定的 $m(=0,1,\cdots)$ 及子列 $1\leqslant n_1<n_2<\cdots$，若有极限 $\lim\limits_{l\to\infty}{}_mP^{(n_l)}={}_mA$，那么由式(18)知极限 $\lim\limits_{l\to\infty}{}_m\Pi^{(n_l)}$ 必存在并且等于 ${}_mA$。因为每个 ${}_m\Pi^{(n_l)}$ 都是稳定的。所以其极限 ${}_mA$ 必是稳定的。

再证充分性。如果对一固定的 m 和一子序列 $1\leqslant n_1<n_2<\cdots$ 有极限 $\lim\limits_{l\to\infty}{}_mP^{(n_l)}$ 记作 ${}_m\Pi$，而且 ${}_m\Pi$ 是稳定的。那么对任何 $m(=0,1,\cdots,), n(=1,2,\cdots)$，总可唯一地确定 $l(=1,2,\cdots)$ 使得 $n_l\leqslant n<n_{l+1}$，令

$$ {}_m\Pi^{(n)}=\begin{cases}{}_m\Pi, & 若\ n=n_l,\\ {}_m\Pi_{m+n_l}P^{(n-n_l)}, & 若\ n_l<n<n_{l+1}。\end{cases} \tag{20}$$

因为 ${}_m\Pi$ 是稳定的，${}_{m+n_l}P^{(n-n_l)}$ 是随机矩阵，故 ${}_m\Pi^{(n)}$ 是稳定的。利用 C－K 方程、式(20)与假设条件有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[{}_mP^{(n)}-{}_m\Pi^{(n)}]&=\lim_{n\to\infty}[{}_mP^{(n_l)}{}_{m+n_l}P^{(n-n_l)}-m\Pi_{m+n_l}P^{(n-n_l)}]\\&=\lim_{n\to\infty}[{}_mP^{(n_l)}-{}_m\Pi]_{m+n_l}P^{(n-n_l)}=0。\end{aligned}$$

上式中最后一个等号是因为 $n\to\infty$ 时，必有 $l\to\infty$，又每个 ${}_{m+n_l}P^{(n-n_l)}$ 都是随机矩阵，以及 $\lim\limits_{l\to\infty}{}_mP^{(n_l)}={}_m\Pi$ 的假定而得。依定理 7 知 X 弱遍历，证完。

定理 8 有限马氏链 X 是弱遍历的充要条件是存在一递增的自然数列 $1\leqslant n_1<n_2<\cdots$，使得非负数项级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)})$ 发散 。

证 必要性。若 X 是弱遍历的，由定理 6，$\lim\limits_{n\to\infty}a({}_mP^{(n)})=1$，对任何非负整数 m 都成立。于是可取到递增自然数列 $1\leqslant n_1<n_2<\cdots$，使得

$$a\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)\geqslant\frac{1}{2},\qquad l=1,2,\cdots,$$

故 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)$ 发散。

再证充分性。根据微积分知识非负数项级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)$ 发散的充要条件是无穷乘积

$$\prod_{l=1}^{\infty}\left[1-a\left({}_{n_l}P^{(n_{l-1}-n_l)}\right)\right]=0 \tag{21}$$

现在假设上述级数发散，故式(21)成立。

对任意给定的 $m=0, 1, \cdots, n=1, 2, \cdots$，总可取到自然数 l 与非负整数 k，使得

$$m\leqslant n_l<\cdots<n_{l+k}\leqslant m+n<n_{l+k+1},$$

利用 C－K 方程与定理 5 的推论，并注意到 $0\leqslant 1-a(P)\leqslant 1$，便有

$$0\leqslant 1-a({}_mP^{(n)})\leqslant[1-a({}_mP^{(n_l-m)})]\left[1-a\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)\right]\cdots$$

$$\begin{aligned}&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\left[1-\alpha\left({}_{n_{l+k-1}}P^{(n_{l+k}-n_{l+k-1})}\right)\right]\left[1-\alpha\left({}_{n_{l+k}}P^{(m+n-n_{l+k})}\right)\right]\\\leqslant&\left[1-\alpha\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)\right]\left[1-\alpha\left({}_{n_{l+1}}P^{(n_{l+2}-n_{l+1})}\right)\right]\cdots\\&\left[1-\alpha\left({}_{n_{l+k-1}}P^{(n_{l+k}-n_{l+k-1})}\right)\right]。\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，那么 $k\to\infty$，由式(21)知上式右方趋于零。所以对任何 $m=0,1,\cdots$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha({}_mP^{(n)})=1$，根据定理 6 即断言 X 是弱遍历的。

推论　$\sum\limits_{m=0}^{\infty}\alpha({}_mP)$ 发散的有限马氏链 X 是弱遍历的。对于仅有两个状态的马氏链弱遍历的充要条件是级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\alpha({}_mP)$ 发散。

证　只需在定理 8 中取 $n_l=l$，$l=1,2,\cdots$，即得第一论断。

由定理 5 及两状态马氏链的假定，对任何 $m=0,1,\cdots$，$n=1,2,\cdots$有

$$1-\alpha({}_mP^{(n)})=\prod_{l=m}^{m+n-1}(1-\alpha({}_lP))。\tag{22}$$

因而由定理 6、式(22)及微积分知识得知：如果两状态马氏链是弱遍历的，则 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\alpha({}_mP)$ 发散。再结合第一论断便得第二论断。

定理 9　有限马氏链是弱遍历的充要条件是存在单增的自然数列 $1\leqslant n_1<n_2<\cdots$使得非负数项级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\delta\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)$ 发散。

证　由式(6)及定理 8，即证得充分性。

因为任何有界数列必有收敛的子序列，以及状态空间是有限的，所以对任何 $m=0,1,\cdots$，$\{{}_mP^{(n)},n=1,2,\cdots\}$ 都有收敛的子序列。于是，如果链是弱遍历的，则由定理 7 的推论，并注意到遍历系数 $\delta(P)$ 是 P 中元素的连续函数以及 $\delta(P)$ 是固有的，便知：对任何 $m=0,1,\cdots$，必存在子列 $1\leqslant m_1<m_2<\cdots$，使得 $\lim\limits_{l\to\infty}\delta({}_mP^{(m_l)})=1$。由此可见必有递增自然数列 $1\leqslant n_1<n_2<\cdots$，使得

$$\delta\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)\geqslant\frac{1}{2},\qquad l=1,2,\cdots,$$

从而 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\delta\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)$ 发散，定理证完。

推论　$\sum\limits_{m=0}^{\infty}\delta({}_mP)$ 发散的有限马氏链是弱遍历的。

注　由于遍历系数 $\mu(P)$ 不是固有的，因此对 $\mu(P)$ 不能得到像关于 $\alpha(P)$、$\delta(P)$ 的定理 8、定理 9 那样的类似定理，但是由式(6)知，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\mu\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)$ 发散是链弱遍历的充分条件。

我们还能通过两个具有相同转移统计规律的独立的马尔科夫系统 Σ_1、Σ_2 的随机运动来形象地刻画弱遍历性。

定理 10　设有限非齐次马氏链 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 与 $Y=\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 具有相同的状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$、相同的初始分布 $\{q_i,i\in S\}$ 及相同的转移矩阵列

$\{_nP,\ n=0,1,\cdots\}$，而且 X 与 Y 相互独立，则 X(或 Y) 是弱遍历的充要条件是以概率 1 有：X 与 Y 在任意给定时刻处于不同的状态，最终要同时到达相同的状态，即 Σ_1 与 Σ_2 尽管在任一确定时刻从不同的状态出发，但是最终总要相遇。

证 必要性。在任意给定的时刻 $m(=0,1,\cdots)$ X 与 Y 已分别依次处于不同的状态 i、j 的条件下，恰在时刻 $m+n(n=1,2,\cdots)$ 达到同样状态的概率为 $P(X_{m+n}=Y_{m+n}\mid X_m=i,Y_m=j)$，利用概率的有限可加性、$X$ 与 Y 独立的假定、C_2-不等式及式 (5) 有

$$\begin{aligned}P(X_{m+n}=Y_{m+n}\mid X_m=i,\ Y_m=j)&=\sum_{k=1}^{N}\frac{P(X_m=i,X_{m+n}=k,Y_m=j,Y_{m+n}=k)}{P(X_m=i,Y_m=j)}\\&=\sum_{k=1}^{N}P(X_{m+n}=k\mid X_m=i)P(Y_{m+n}=k\mid Y_m=j)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{N}[\min(p_{ik}(m,m+n),p_{jk}(m,m+n))]^2\\&\geqslant\frac{1}{N}\Big[\sum_{k=1}^{N}\min(p_{ik}(m,m+n),p_{jk}(m,m+n))\Big]^2\\&\geqslant\frac{1}{N}a^2({}_mP^{(n)})。\end{aligned}\tag{23}$$

故对任何状态 $i\neq j$，任何 $m=0,1,\cdots,\ n=1,2,\cdots$

$$\begin{aligned}P(X_{m+n}\neq Y_{m+n}\mid X_m=i,Y_m=j)&=1-P(X_{m+n}=Y_{m+n}\mid X_m=i,Y_m=j)\\&\leqslant 1-\frac{1}{N}a^2({}_mP^{(n)})。\end{aligned}\tag{24}$$

如果 X(或 Y) 是弱遍历的，由定理 6 必存在递增的非负整数列 $m=n_0<n_1<n_2<\cdots$，使得对所有的 $l=0,1,\cdots$，都有 $\frac{1}{2}<a\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)\leqslant 1$ 成立。由此可得

$$\prod_{l=0}^{L-1}\Big[1-\frac{1}{N}a^2\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)\Big]\xrightarrow[L\to\infty]{}0。\tag{25}$$

利用 X 与 Y 的独立性、马氏性假设以及式 (24) 有

$$\begin{aligned}&P(X_{n_1}\neq Y_{n_1},X_{n_2}\neq Y_{n_2}\mid X_m=i,Y_n=j)\\&=\sum_{\substack{i_1\neq j_1\\ i_1,j_1\in S}}\sum_{\substack{i_2\neq j_2\\ i_2,j_2\in S}}P\left(X_{n_1}=i_1,Y_{n_1}=j_1,X_{n_2}=i_2,Y_{n_2}=j_2\mid X_m=i,Y_m=j\right)\\&=\sum_{\substack{i_1\neq j_1\\ i_1,j_1\in S}}\sum_{\substack{i_2\neq j_2\\ i_2,j_2\in S}}P\left(X_{n_1}=i_1,X_{n_2}=i_2\mid X_m=i\right)P\left(Y_{n_1}=j_1,Y_{n_2}=j_2\mid Y_m=j\right)\\&=\sum_{\substack{i_1\neq j_1\\ i_1,j_1\in S}}\sum_{\substack{i_2\neq j_2\\ i_2,j_2\in S}}p_{ii_1}(m,n_1)p_{i_1i_2}(n_1,n_2)p_{jj_1}(m,n_1)p_{j_1j_2}(n_1\ n_2)\\&=\sum_{\substack{i_1\neq j_1\\ i_1,j_1\in S}}p_{ii_1}(m,n_1)p_{jj_1}(m,n_1)\Big[\sum_{\substack{i_2\neq j_2\\ i_2,j_2\in S}}p_{i_1i_2}(n_1,n_2)p_{j_1j_2}(n_1,n_2)\Big]\\&=\sum_{\substack{i_1\neq j_1\\ i_1,j_1\in S}}p_{ii_1}(m,n_1)p_{jj_1}(m,n_1)P\left(X_{n_2}\neq Y_{n_2}\mid X_{n_1}=i_1,Y_{n_1}=j_1\right)\\&\leqslant\sum_{\substack{i_1\neq j_1\\ i_1,j_1\in S}}p_{ii_1}(m,n_1)p_{jj_1}(m,n_1)\left(1-\frac{1}{N}a^2({}_{n_1}P^{(n_2-n_1)})\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(1-\frac{1}{N}\alpha^2\left({}_{n_0}P^{(n_1-n_0)}\right)\right)\left(1-\frac{1}{N}\alpha^2\left({}_{n_1}P^{(n_2-n_1)}\right)\right)。\tag{26}$$

由式（26），应用归纳法，可得一般的不等式：

$$P\left(X_{n_1}\neq Y_{n_1},\cdots,X_{n_L}\neq Y_{n_L}\mid X_m=i,Y_m=j\right)$$
$$\leqslant \prod_{l=0}^{L-1}\left(1-\frac{1}{N}\alpha^2\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)\right),\qquad L=1,2,\cdots\tag{27}$$

由此更有

$$P\left(X_n\neq Y_n,n=m,m+1,\cdots,n_L\mid X_m=i,Y_m=j\right)$$
$$\leqslant \prod_{l=0}^{L-1}\left(1-\frac{1}{N}\alpha^2\left({}_{n_l}P^{(n_{l+1}-n_l)}\right)\right),\qquad L=1,2,\cdots\tag{28}$$

在式（28）中，令 $L\to\infty$，由式（25）得

$$P\left(X_n\neq Y_n,n=m,m+1,\cdots\mid X_m=i,Y_m=j\right)=0。$$

这表示 X 与 Y 最终要同时到达相同状态的概率为 1。

反之，证充分性。假设 X 与 Y 在任意给定的时刻分别处于不同的状态 i、j，而两者最终要同时达到相同状态的概率为 1。若以 $r_{ij}(m,n)$ 表示在 $X_m=i,Y_m=j$ 的条件下，X 与 Y 在时刻 $m+n$ 之后首次同时达到同样的状态的概率，那么必有

$$\lim_{n\to\infty}r_{ij}(m,n)=0,\qquad m=0,1,\cdots,i\neq j。\tag{29}$$

以 $r_{ijk}(m,m')$ 表示在 $X_m=i,Y_m=j$ 的条件下，X 与 Y 于 $m+m'$ 时首次达到同一个状态恰为 k 的概率。又以 $r_{ij}^k(m,n)$ 表示在 $X_m=i$，$Y_m=j$ 的条件下，$X_{m+n}=k$，并且 X 与 Y 在 $m+n$ 之后才首次到达同一个状态的概率。因为对称，所以 $r_{ij}(m,n)=r_{ji}(m,n)$，$r_{ijk}(m,m')=r_{jik}(m,m')$，由记号的概率含义显然 $r_{ij}(m,n)\geqslant r_{ij}^k(m,n)$。应用这些记号，利用 X 与 Y 的独立性、马氏性以及它们最终要同时到达相同状态的概率为 1 等假定，则有

$$\begin{aligned}
p_{ik}(m,m+n)&=P\left(X_{m+n}=k\mid X_m=i\right)\frac{P(Y_m=j)}{P(Y_m=j)}\\
&=P\left(X_{m+n}=k\mid X_m=i,Y_m=j\right)\\
&=\sum_{m'=1}^{n}P\left(X_{m+m'}=Y_{m+m'},X_{m+n}=k\mid X_m=i,Y_m=j\right)\\
&\quad+\sum_{m'>n}P\left(X_{m+m'}=Y_{m+m'},X_{m+n}=k\mid X_m=i,Y_m=j\right)\\
&=\sum_{m'=1}^{n}\sum_{h\in S}P\left(X_{m+m'}=Y_{m+m'}=h,X_{m+n}=k\mid X_m=i,Y_m=j\right)+r_{ij}^k(m,n),\\
&\qquad m=0,1,\cdots,n=1,2,\cdots,
\end{aligned}\tag{30}$$

又
$$\begin{aligned}
&r_{ijh}(m,m')p_{hk}(m+m',m+n)\\
&=P\left(X_{m+m'}=Y_{m+m'}=h\mid X_m=i,Y_m=j\right)P\left(X_{m+n}=k\mid X_{m+m'}=h\right)\\
&=\left[\frac{P\left(X_m=i,X_{m+m'}=h\right)P\left(Y_m=j,Y_{m+m'}=h\right)}{P(X_m=i)P(Y_m=j)}\right]\left[\frac{P\left(X_{m+m'}=h,X_{m+n}=k\right)}{P\left(X_{m+m'}=h\right)}\right]\\
&\quad\cdot\left[\frac{P\left(X_m=i,X_{m+m'}=h,X_{m+n}=k\right)}{P\left(X_m=i,X_{m+m'}=h,X_{m+n}=k\right)}\right]\\
&=\frac{P\left(X_m=i,X_{m+m'}=h,X_{m+n}=k\right)}{P(X_m=i)}\;\frac{P\left(Y_m=j,Y_{m+m'}=h\right)}{P(Y_m=j)}\\
&=\frac{P\left(X_m=i,Y_m=j,X_{m+m'}=Y_{m+m'}=h,X_{m+n}=k\right)}{P(X_m=i,Y_m=j)}
\end{aligned}$$

$$= P(X_{m+m'} = Y_{m+m'} = h, X_{m+n} = k \mid X_m = i, Y_m = j)$$

$$i \neq j, h, k \in S, m = 0,1,\cdots, n = 1,2,\cdots, m' = 1,\cdots,n \quad (31)$$

将式(31)代入式(30)便得

$$p_{ik}(m,m+n) = \sum_{m'=1}^{n}\sum_{k\in S} r_{ijk}(m,m')p_{kk}(m+m',m+n) + r_{ij}^{k}(m,n),$$

$$i,j,k \in S, j \neq i, m = 0,1,\cdots, n = 1,2,\cdots, \quad (32)$$

类似地推导可得

$$p_{jk}(m,m+n) = \sum_{m'=1}^{n}\sum_{k\in S} r_{ijk}(m,m')p_{kk}(m+m',m+n) + r_{ji}^{k}(m,n),$$

$$i,j,k \in S, i \neq j, m = 0,1,\cdots, n = 1,2,\cdots \quad (33)$$

由式(32)、(33)可得：对任何 i，j，$k\in S$，$i\neq j$，$m=0$，1，…，$n=1$，2，…

$$|p_{ik}(m,m+n) - p_{jk}(m,m+n)| = |r_{ij}^{k}(m,n) - r_{ji}^{k}(m,n)| \leqslant r_{ij}(m,n)。 \quad (34)$$

于是由式(29)及式(34)知：对任何 i，j，$k\in S$，$i\neq j$，

$$|p_{ik}(m,m+n) - p_{jk}(m,m+n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad m = 0,1,\cdots \quad (35)$$

回顾遍历系数 $\alpha(P)$ 的表达式(7)，利用式(35)便有 $\alpha({}_mP^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$，对任何 $m=0$，1，…都成立，再由定理 6 得知马氏链 X(或 Y)是弱遍历的。定理得证。

对弱遍历性赋予一定的限制，可得到它的一种强化了的变形，即一致弱遍历性。称有限非齐次马氏链 X **是一致弱遍历的**，当且仅当对无论什么状态 i，j，$k\in S$。

$$\lim_{n\to\infty}[p_{ik}(m,m+n) - p_{jk}(m,m+n)] = 0 \quad (36)$$

总是关于 $m=0$，1，…一致地成立。或由定理 6 可等价地定义为

$$\lim_{n\to\infty}\alpha({}_mP^{(n)}) = 1 \quad (37)$$

关于 $m=0$，1，…，一致地成立。

定理 11 有限非齐次马氏链是一致弱遍历的充要条件是存在正整数 n_0 及正数 a 使得对无论什么非负整数 m 都有 $\alpha({}_mP^{(n_0)}) > a$ 成立。

证 必要性可从一致弱遍历性的等价定义形式(37)得到。

现证充分性。若对正整数 n_0、正数 a 及任何 $m = 0,1,\cdots, 0 < a < \alpha({}_mP^{(n_0)}) \leqslant 1$ 都成立，那么，$1 - \alpha({}_mP^{(n_0)}) < 1 - a, m = 0,1,\cdots$，从而由定理 5 的推论知：对无论什么非负整数 m，无论什么正整数 n ：$ln_0 \leqslant n < (l+1)n_0, l = 0,1,\cdots$，则有

$$1 - \alpha({}_mP^{(n)}) \leqslant (1-a)^l$$

故对任何 $m=0$，1，…，$n=1$，2，…

$$1 \geqslant \alpha({}_mP^{(n)}) \geqslant 1 - (1-a)^l \geqslant 1 - (1-a)^{(n/n_0)-1} \quad (38)$$

由式(38)及定义式(37)即得马氏链是一致弱遍历的，证毕。

注 因为式(38)及式(7)，所以对任何 $m=0$，1，…，$n=1$，2，…，i，$j\in S$ 都有

$$\sum_{k=1}^{N}|p_{ik}(m,m+n) - p_{jk}(m,m+n)| \leqslant 2(1-a)^{(n/n_0)-1},$$

注意到对任何 $m=0$，1，…，$n=1$，2，…，i，$j\in S$，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}|p_{ik}(m,m+n) - p_{jk}(m,m+n)| = \sum_{k=1}^{N}(p_{ik}(m,m+n) - p_{jk}(m,m+n))^{+}$$

$$= -\sum_{k=1}^{N}(p_{ik}(m,m+n) - p_{jk}(m,m+n))^{-},$$

从而对任何 $m=0, 1, \cdots, n=1, 2, \cdots, i, j, k\in S$ 都有

$$|p_{ik}(m,m+n)-p_{jk}(m,m+n)|\leqslant(1-a)^{(n/n_0)-1}。\quad(39)$$

由此说明式（36）是以几何速度一致地收敛于零。

一般说来，定理 11 中所给出的充要条件是不易检验的。因此去寻求简便的一致弱遍历性的充分条件是有用的。为此需要先给出几个概念和辅助结论。

对随机矩阵 P，将 P 中每个正值元素都用 1 代换后所得到的矩阵称为 P 的**关联矩阵**。由遍历系数 $\mu(P)$、$\alpha(P)$ 的定义式 (5)，即可发现一个随机矩阵 P，无论是马尔科夫矩阵还是不规则矩阵实际上只依赖于 P 的关联矩阵。设 $P(1)$ 与 $P(2)$ 是两个 $N\times N$ 的随机矩阵，当且仅当 $P(1)$ 与 $P(2)$ 的关联矩阵相同时，记作 $P(1)\sim P(2)$。

设 P 是随机矩阵，如果存在某自然数 n_0 使得 $\alpha(P^{n_0})>0$，则称 P 是**混合的**。

引理 1　设 $P(1)$ 是 $N\times N$ 随机矩阵，$P(2)$ 是 $N\times N$ 混合矩阵，如果 $P(1)P(2)\sim P(1)$，则 $P(1)$ 是马尔科夫矩阵。

证　容易验证：若 A、B、C 是三个 $N\times N$ 随机矩阵，又 $A\sim B$，则 $AC\sim BC$，由此及假设条件得 $P(1)[P(2)]^2\sim P(1)P(2)\sim P(1)$。用归纳法，一般地对任何正整数 n 有 $P(1)[P(2)]^n\sim P(1)$。由于 $P(2)$ 是混合矩阵，可以证明对充分大的正整数 n，$[P(2)]^n$ 是马尔科夫矩阵（参看［15］）。据定理 2，$[P(2)]^n$ 中至少有一列不妨记作第 j_0 列的元素全为正值，既然 $P(1)$ 是随机矩阵，那么 $P(1)[P(2)]^n$ 的第 j_0 列元素全为正值，仍据定理 2，$P(1)[P(2)]^n$ 是马尔科夫矩阵，既然 $P(1)\sim P(1)[P(2)]^n$，那么 $P(1)$ 必是马尔科夫矩阵，证毕。

引理 2　如果对每个 $m=0, 1, \cdots, n=1, 2, \cdots, {}_mP^{(n)}$ 都是 $N\times N$ 混合矩阵，则对一切 $m=0,1,\cdots,n=t+1,t+2,\cdots,{}_mP^{(n)}$ 都是马尔科夫矩阵，这里 t 是在所有对应于 $N\times N$ 混合矩阵的关联矩阵中所含不同类型的个数。

证　因为 N 是给定的正整数，那么元素仅取 0 或 1 为值的 $N\times N$ 方阵最多只有 $2^{(N^2)}$ 个，所以 t 必为有限数。由 t 本身的含义，对任何 $m=0, 1, \cdots$，在 ${}_mP^{(1)},{}_mP^{(2)},\cdots,{}_mP^{(t+1)}$ 这 $t+1$ 个 $N\times N$ 随机矩阵中至少有两个具有相同的关联矩阵，从而存在自然数 n_1、n_2：$0<n_1<n_2\leqslant t+1$，使得 ${}_mP^{(n_1)}\sim{}_mP^{(n_2)}$，即 ${}_mP^{(n_1)}\sim{}_mP^{(n_1)}\,{}_{m+n_1}P^{(n_2-n_1)}$，由假设 ${}_{m+n_1}P^{(n_2-n_1)}$ 是混合矩阵，于是依据引理 1 知 ${}_mP^{(n_1)}$ 是马尔科夫矩阵。于是对任何 $m=0, 1, \cdots, n=t+1, t+2, \cdots$,

$${}_mP^{(n)}={}_mP^{(n_1)}\,{}_{m+n_1}P^{(n-n_1)}\quad(40)$$

必定都是马尔科夫矩阵。倘若不然，依据定理 2，${}_mP^{(n)}$ 中每一列都有零元素，而 ${}_mP^{(n_1)}$ 中至少有一列不妨记作第 j_0 列的元素全为正值。这样由式(40)知 ${}_{m+n_1}P^{(n-n_1)}$ 的第 j_0 行的元素必全为零，这与 ${}_{m+n_1}P^{(n-n_1)}$ 是随机矩阵矛盾。故结论得证。

注　在引理 1 与引理 2 的证明过程中，实际上已证明了如下的一般结论：如果两个 $N\times N$ 随机矩阵中至少有一个是马尔科夫矩阵，则其积必定也是马尔科夫矩阵。

定理 12　如果有正整数 n_0 与正数 a，对一切 $m=0,1,\cdots,n=n_0,n_0+1,\cdots,{}_mP^{(n)}$ 都是混合矩阵，而且对一切 $m=0, 1, \cdots$,

$$\min_{i,j\in S}{}^{+}\, p_{ij}(m,m+n_0)\geqslant a>0,\quad(41)$$

这里记号 $\min^+$ 表示仅对正值元素取小，则有限马氏链是一致弱遍历的。

证　由假设对任何 $m=0,1,\cdots,{}_mP^{(n_0)},{}_mP^{(2n_0)},\cdots,{}_mP^{((t+1)n_0)}$ 都是混合矩阵，再由 t 的含

义，必有正整数 $0<n_1<n_2\leqslant t+1$，使得

$$_mP^{(n_1n_0)}\sim {}_mP^{(n_2n_0)}={}_mP^{(n_1n_0)}\ {}_{m+n_1n_0}P^{((n_2-n_1)n_0)},$$

$$_mP^{((t+1)n_0)}={}_mP^{(n_1n_0)}\ {}_{m+n_1n_0}P^{((t+1-n_1)n_0)},$$

依引理 1 知 $_mP^{(n_1n_0)}$ 从而 $_mP^{((t+1)n_0)}$ 都是马尔科夫矩阵，于是按马尔科夫矩阵的定义及定义式 (5) 有

$$0<\mu({}_mP^{((t+1)n_0)})\triangleq\max_{1\leqslant j\leqslant N}\min_{1\leqslant i\leqslant N}p_{ij}(m,m+(t+1)n_0)。$$

故至少有一 $j_0(=1,\cdots,N)$，使得 $p_{ij_0}(m,m+(t+1)n_0)>0, i=1,\cdots,N$。应用 C-K 方程，

$$0<p_{ij_0}(m,m+(t+1)n_0)=\sum_{k\in S}p_{ik}(m,m+tn_0)p_{kj_0}(m+tn_0,m+(t+1)n_0),$$

那么至少有一 $k_0(=1,\cdots,N)$，使得

$$p_{ij_0}(m,m+(t+1)n_0)\geqslant p_{ik_0}(m,m+tn_0)p_{k_0j_0}(m+tn_0,m+(t+1)n_0)>0。$$

利用假设条件式 (41) 得

$$p_{ij_0}(m,m+(t+1)n_0)\geqslant p_{ik_0}(m,m+tn_0)a>0。$$

同理至少有一 $r_0(=1,\cdots,N)$ 使得

$$p_{ik_0}(m,m+tn_0)\geqslant p_{ir_0}(m,m+(t-1)n_0)a>0,$$

将此式代入前式，并依此类推便得

$$p_{ij_0}(m,m+(t+1)n_0)\geqslant a^{t+1},\qquad i=1,\cdots,N,\ m=0,1,\cdots,\tag{42}$$

故

$$\mu({}_mP^{((t+1)n_0)})\geqslant a^{t+1},\qquad m=0,1,\cdots,\tag{43}$$

根据定理 1 即有

$$\alpha({}_mP^{((t+1)n_0)})\geqslant a^{t+1},\qquad m=0,1,\cdots,\tag{44}$$

于是由定理 11 知马氏链是一致弱遍历的，证完。

注 1 如果对正整数 n_0，$N\times N$ 随机矩阵列 $_mP^{(n_0)}, m=0,1,\cdots$ 都是不规则的，则 $N\times N$ 随机矩阵列 $_mP^{(n)}, m=0,1,\cdots,n=1,2,\cdots$ 都是混合的。事实上，因为 $_mP^{(n_0)}, m=0,1,\cdots$ 是不规则的，依定义 $\alpha({}_mP^{(n_0)})>0, m=0,1,\cdots$，应用定理 5，对任何 $m=0, 1, \cdots, n=n_0, n_0+1, \cdots$,

$$(1-\alpha({}_mP^{(n)})\leqslant(1-\alpha({}_mP^{(n_0)}))(1-\alpha({}_{m+n_0}P^{(n-n_0)}))\leqslant(1-\alpha({}_mP^{(n_0)}))<1,$$

故 $\alpha({}_mP^{(n)})>0$，即 $_mP^{(n)}$ 是不规则的，依定义也是混合的。

注 2 考察定理 12 的证明便知：如果 $N\times N$ 随机矩阵 $_mP^{(n_0)}$ 是不规则的，则由假设条件式(41)可得 $\alpha({}_mP^{(n_0)})\geqslant a$。

通观 § 2，值得引起我们注视的是遍历系数 $\mu(P)$、$\delta(P)$、$\alpha(P)$ 在刻画和研究马氏链（非齐次或齐次）的遍历性中的重要作用。

§ 3 强 遍 历 性

定义 称有限马氏链 X 是强遍历的，当且仅当对所有的 $m=0, 1, \cdots, i, j\in S$，存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(m,m+n)$，而且它不依赖于 $i\in S$，记为 $\pi_j(m)$，即

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(m,m+n)=\pi_j(m),\qquad i,j\in S,m=0,1,\cdots。\tag{45}$$

注 1 如果式 (45) 成立，实际上此极限 $\pi_j(m)$ 也不依赖于 $m=0, 1, \cdots$，现在来证明

这一事实。用矩阵记号来表示式(45)，就是

$$\lim_{n\to\infty} {}_mP^{(n)} = \Pi(m), \qquad m = 0,1,\cdots, \tag{46}$$

$\Pi(m)$ 是 $N\times N$ 方阵，而且对任何 $j=1,\cdots,N$，第 j 列上的元素都等于 $\pi_j(m)$ 同一个值。因为C-K方程，

$${}_mP^{(n)} = {}_mP_{m+1}P^{(n-1)}, \qquad m = 0,1,\cdots,n = 1,2,\cdots,$$

在此式中，令 $n\to\infty$，由式(46)便得

$$\Pi(m) = {}_mP\Pi(m+1), \qquad m = 0,1,\cdots, \tag{47}$$

在式(47)中，注意到${}_mP$是随机矩阵，而 $\Pi(m+1)$ 的各行相同，故 $\Pi(m) = \Pi(m+1), m = 0,1,\cdots$，结论得证。故可将式(46)、(45)中的 $\Pi(m)$、$\pi_j(m)$ 分别依次记为 Π、π_j。

注2　与弱遍历性定义中的注2一样的论证便知，为了保证式(45)成立，只要存在某个正整数 m_0，对所有的 $m>m_0$，式(45)成立就足够了。

注3　依定义，一个强遍历的有限马氏链显然必是弱遍历的。但是，一般说来，由弱遍历性未必能引致强遍历性，那么它们之间的差异在哪里？又如何来表征这一差异？为了回答这些问题引出了下面的概念与结论。

称有限马氏链 X 是**渐近齐次的**，当且仅当存在着定义在状态空间 $S=\{1,\cdots N\}$ 上的概率分布 $P'=[p_1,\cdots,p_N]$ 使得

$$\lim_{m\to\infty} P'{}_mP = P'。 \tag{48}$$

称有限马氏链 X 是**渐近平稳的**，当且仅当存在着定义在 $S=\{1,\cdots,N\}$ 上的概率分布 $P'=[p_1,\cdots,p_N]$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} P'{}_mP^{(n)} = P' \tag{49}$$

对所有的 $m=0,1,\cdots$ 都成立。

定理13　设X是渐近齐次有限马氏链，P'是相应的定义在 S 上的概率分布，则对一切 $n=1,2,\cdots$ 都有

$$\lim_{m\to\infty} P'{}_mP^{(n)} = P'。 \tag{50}$$

证　当 $n=1$ 时，由 X 是渐近齐次的定义便知结论成立。

现作归纳假设：对正整数 n 结论已成立，由此

$$\lim_{m\to\infty} P'{}_mP^{(n+1)} = \lim_{m\to\infty} P'{}_mP^{(n)}{}_{m+n}P = \lim_{m\to\infty}[(P'{}_mP^{(n)} - P'){}_{m+n}P + P'{}_{m+n}P] = \lim_{m\to\infty} P'{}_{m+n}P = P'。$$

即结论对 $n+1$ 也成立，由归纳法便得本定理。

定理14　有限马氏链 X 如果是渐近平稳的则必是渐近齐次的。

证　因为对任何 $m=0,1,\cdots,n=1,2,\cdots$有

$$P'{}_mP^{(n+1)} = P'{}_{m+n}P + [P'{}_mP^{(n)} - P']{}_{m+n}P \tag{51}$$

由假设 $\lim_{n\to\infty} P'{}_mP^{(n+1)} = P'$，$\lim_{n\to\infty}[P'{}_mP^{(n)} - P'] = 0$。于是对式(51)两边令 $n\to\infty$，便得

$$\lim_{m\to\infty} P'{}_mP = \lim_{n\to\infty} P'{}_{m+n}P = P',$$

依定义 X 是渐近齐次的，证完。

注　一般地说，定理14的逆命题不真（参看定理16）。

定理15　有限马氏链 X 是强遍历的充要条件为 X 是弱遍历的且渐近平稳的。

证　必要性。如果 X 是强遍历的，依强遍历的定义及其注1有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(m,m+n) = \pi_j$，

$i,j\in S, m=0,1,\cdots$。记 $\pi=[\pi_1,\cdots,\pi_N]', e=[1,\cdots,1]'$，用矩阵来表示前式成 $\lim\limits_{n\to\infty}{}_mP^{(n)}=e\pi'$，注意到 π 是概率分布，从而

$$\lim_{n\to\infty}\pi'{}_mP^{(n)}=\pi'e\pi'=\pi',\qquad m=0,1,\cdots,$$

这表示 X 是渐近平稳的。X 弱遍历显然。

再证充分性。如果 X 是弱遍历的且渐近平稳，相应的概率分布是 $P'=[p_1,\cdots,p_N]$，则对任何 i，$j\in S$

$$\begin{aligned}|p_{ij}(m,m+n)-\sum_{k\in S}p_kp_{kj}(m,m+n)|&=|\sum_{k\in S}p_k[p_{ij}(m,m+n)-p_{kj}(m,m+n)]|\\&\leqslant\sum_{k\in S}|p_{ij}(m,m+n)-p_{kj}(m,m+n)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\qquad m=0,1,\cdots,\end{aligned}$$

$$\sum_{k\in S}p_kp_{kj}(m,m+n)\xrightarrow[n\to\infty]{}p_j,\qquad j\in S,\qquad m=0,1,\cdots。$$

综合上面两式即得

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(m,m+n)=p_j,\qquad m=0,1,\cdots,i,j\in S。$$

即 X 是强遍历的。证完。

定理 15 表明强遍历性与弱遍历性的差异在于具备不具备渐近平稳性。

定理 16 假设存在某正整数 n_0 和正数 a，使得 $a({}_mP^{(n_0)})\geqslant a$ 对一切 $m=0$，1，…都成立，在此假定下，渐近平稳性与渐近齐次性等价。

证 因为已有定理 14，所以只要证明在所给的假定下由渐近齐次性可导致渐近平稳性。依渐近齐次性的定义，存在概率分布 $P=[p_1,\cdots,p_N]'$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}P'{}_mP=P'。\tag{52}$$

先考虑 $n_0=1$ 的特殊情形。令 $d'(m)=P'-P'{}_mP, m=0,1,\cdots$，由式 (52) 及 $d'(m)$ 的规定知：

$$\lim_{m\to\infty}d(m)=0, d'(m)e=0, m=0,1,\cdots,\tag{53}$$

其中 $e=[1,\cdots,1]'N$ 维列向量。又令 N 维行向量

$$a'_m(n)=P'_{m+n-1}P-P'{}_mP^{(n)},\qquad m=0,1,\cdots,n=1,2,\cdots,\tag{54}$$

由 $a'_m(n)$ 与 $d'(m)$ 的规定不难验证：对任何 $m=0$，1，…，$n=1$，2，…，

$$a'_m(n)e=0,\quad a'_m(n+1)=a'_m(n)_{m+n}P+d'(m+n-1)_{m+n}P。\tag{55}$$

以 $\alpha_m(n)$ 和 $\delta_m(n)$ 分别依次记 N 维列向量 $a_m(n)$ 和 $d(m+n-1)$ 的各分量的绝对值之和。由式 (54)，

$$a'_m(n+1)=P'_{m+n}P-P'{}_mP^{(n+1)}=[P'-P'{}_mP^{(n)}]_{m+n}P。\tag{56}$$

注意到 $P'{}_mP^{(n)}$ 也是一概率分布记作 $P'{}_mP^{(n)}=[q_{m1}^{(n)},\cdots,q_{mN}^{(n)}]$ 将此式代入式 (56)，并利用式 (11) 及假定可得

$$\begin{aligned}\alpha_m(n+1)&=\sum_{j=1}^N|\sum_{i=1}^N(p_i-q_{mi}^{(n)})p_{ij}(m+n,m+n+1)|\\&\leqslant\sum_{j=1}^N|p_j-q_{mj}^{(n)}|(1-a({}_{m+n}P))\\&\leqslant\sum_{j=1}^N|p_j-q_{mj}^{(n)}|(1-a)。\end{aligned}\tag{57}$$

由 $a'_m(n)$ 与 $d'(m+n-1)$ 的定义知：

$$a'_m(n) + d'(m+n-1) = P' - P'_m P^{(n)},$$

从而 $P' - P'_m P^{(n)}$ 各分量的绝对值之和 $\sum_{j=1}^{N} |p_j - q_{mj}^{(n)}|$ 等于 $a'_m(n) + d'(m+n-1)$ 各分量的绝对值之和。故

$$\sum_{j=1}^{N} |p_j - q_{mj}^{(n)}| \leqslant \alpha_m(n) + \delta_m(n),$$

将上式代入式 (57) 得

$$\alpha_m(n+1) \leqslant [\alpha_m(n) + \delta_m(n)](1-a), \qquad m = 0,1,\cdots, \quad n = 1,2,\cdots, \tag{58}$$

因为式 (53)，所以对任何 $m=0, 1, \cdots$, $\lim_{n\to\infty}\delta_m(n) = 0$，从而由式 (58) 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup\alpha_m(n) \leqslant (1-a)\limsup_{n\to\infty}\alpha_m(n), \quad m = 0,1,\cdots,$$

由此可见 $\limsup_{n\to\infty}\alpha_m(n) = 0, m = 0,1,\cdots$ 这意味着 $\lim_{n\to\infty}a_m(n) = 0, m = 0,1,\cdots$。又因假设式 (52)，那么从定义式 (54) 得 $\lim_{n\to\infty}P'_m P^{(n)} = P'$，对一切 $m=0, 1, \cdots$都成立，即 X 是渐近平稳的。

再考虑一般 $n_0 \geqslant 1$ 的情况。对一固定的 $m(=0,1,\cdots)$，讨论下面的随机矩阵

$$Q_l = {}_{m+ln_0}P^{(n_0)}, \qquad l = 0,1,\cdots,$$

根据假定 $\alpha(Q_l) \geqslant a, l = 0,1,\cdots$。根据渐近齐次性的假设及定理 13，便有 $\lim_{l\to\infty}P'Q_l = P'$。于是由前面已证的特殊情形知：以 $Q_l, l = 0,1,\cdots$ 为 l 时一步转移概率矩阵的马氏链是渐近平稳的。依渐近平稳的定义，对前面的概率分布 P 便有

$$P' = \lim_{n\to\infty}P'Q_0\cdots Q_{n-1} = \lim_{n\to\infty}P'_m P^{(nn_0)}, \tag{59}$$

再次利用渐近齐次的假设及定理 13，还有

$$\lim_{n\to\infty}P'_{m+nn_0}P^{(k)} = P', \quad k = 1,\cdots,n_0, \tag{60}$$

于是由式(59)及式(60)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P'_m P^{(nn_0+k)} &= \lim_{n\to\infty}P'_m P^{(nn_0)}{}_{m+nn_0}P^{(k)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(P'_m P^{(n-n_0)} - P'\right){}_{m+nn_0}P^{(k)} + P'_{m+nn_0}P^{(k)}\right] = P'。\\ k &= 1,\cdots,n_0,\end{aligned} \tag{61}$$

因为式 (61) 及 m 取法的任意性，定理得证。

定理 16 是用遍历系数 $\alpha(P)$ 刻画了渐近平稳性与渐近齐次性之间的差异。

现在能够给出强遍历的充分条件了。

定理 17　设 X 是有限马氏链，存在极限 $\lim_{m\to\infty}{}_mP$，记此极限为 P，而且 P 为混合矩阵，则 X 是强遍历的。

证　因为 P 是混合的，依定义存在正整数 n_0 使得 $\alpha(P^{(n_0)}) > 0$。由假设

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}{}_mP^{(n_0)} &= \lim_{m\to\infty}\left({}_mP_{m+1}P\cdots{}_{m+n_0-1}P\right) \\ &= \left(\lim_{m\to\infty}{}_mP\right)\left(\lim_{m\to\infty}{}_{m+1}P\right)\cdots\left(\lim_{m\to\infty}{}_{m+n_0-1}P\right) \\ &= P^{n_0}。\end{aligned}$$

又因遍历系数 $\alpha(P)$ 是 P 中元素的连续函数，因此必存在正整数 m_0 和正数 a，使得所有的 $m \geqslant m_0$，都有 $\alpha({}_mP^{(n_0)}) \geqslant a > 0$。由 C-K 方程，对任何 $m = 0,1,\cdots, {}_mP^{(m_0+n_0)} = {}_mP^{(m_0)}{}_{m+m_0}P^{(n_0)}$。利用定理 5 得

$$1-\alpha({}_mP^{(m_0+n_0)})\leqslant\left[1-\alpha({}_m P^{(m_0)})\right]\left[1-\alpha({}_{m+m_0}P^{(n_0)})\right]\leqslant 1-a,$$

故对任何 $m=0, 1, \cdots$，都有 $\alpha({}_mP^{(m_0+n_0)})\geqslant a>0$。由此并依据定理 11 可断言 X 是一致弱遍历的。

既然 P 是 $N\times N$ 随机矩阵，必有相应的平稳分布 π，即 $\pi'P=\pi'$。再由假设条件知

$$\lim_{m\to\infty}\pi'{}_mP=\pi'P=\pi',$$

依定义 X 是渐近齐次的。最后由定理 16 与定理 15 即可断言 X 是强遍历的。证完。

定理 18 设有限马氏链 X 是渐近齐次的，并满足定理 12 的假设条件，则 X 是强遍历的。

证 在所给的假设条件下式 (44) 成立，进而应用定理 16 与定理 15，即得要证的结论。

与一致弱遍历性相应的也可考虑附加一定限制的强遍历性。称有限马氏链 X 是**一致强遍历的**，当且仅当对无论什么状态 $i, j\in S$ 及任何非负整数 m，都存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(m,m+n)$，而且此极限与 i、m 无关，记作 π_j，此外

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(m,m+n)=\pi_j,\qquad i,j\in S,\tag{62}$$

关于 $m=0, 1, \cdots$ 一致地成立。

由定义，显然从一致强遍历性可导致一致弱遍历性，但逆命题一般未必成立。

设有限马氏链 X 是一致强遍历的，又状态 j_0 使 $\pi_{j_0}>0$，那么由式 (62) 及 S 为有限集，可断言必存在某正整数 n_0，使得对一切 $m=0, 1, \cdots, i\in S$，都有 $p_{ij_0}(m,m+n_0)\geqslant\pi_{j_0}/2=a>0$。虽然这条件并不是一致强遍历的充分条件，但是再附加上一定的条件就可保证一致强遍历性成立。

定理 19 设 X 是状态空间为 S 的有限马氏链，对任意给定的正整数 n，令

$$a_n=\sup_{i\in S;m',m''>0}\sum_{j\in S}|p_{ij}(m'+n,m'+n+1)-p_{ij}(m''+n,m''+n+1)|,\tag{63}$$

如果非负数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并且存在某正整数 n_0 与状态 $j_0(\in S)$ 使得对任何 $m=0, 1, \cdots, i\in S$，都有 $p_{ij_0}(m,m+n_0)\geqslant a>0$ 成立，则 X 是一致强遍历的，而且关于由式 (62) 所确定的 π_j，$j\in S$ 有

$$|p_{ij}(m,m+n)-\pi_j|\leqslant\inf_{n_0\leqslant l<n}\left\{(1-a)^{\left[\frac{n}{l}\right]-1}+\frac{\sum\limits_{k=l}^{\infty}a_k}{a}\right\}\tag{64}$$

对所有的 $m=0, 1, \cdots, n=n_0+1, n_0+2, \cdots, i, j\in S$ 都成立。其中 $\left[\frac{n}{l}\right]$ 是不超过 $\frac{n}{l}$ 的最大整数。

证 对任意给定的 $i, j\in S$，$\{p_{ij}(m, m+1), m=0, 1, \cdots\}$ 是有界数列，那么必有收敛的子序列，又 S 是有限集，于是 $\{{}_mP, m=0,1,\cdots\}$ 必有收敛的子序列 $\{{}_{m_l}P, l=0,1,\cdots\}$，其极限矩阵记作 P。又因为假设式 (63) 确定的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，从而 $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，由此及定义式 (63) 便知极限 $\lim\limits_{m\to\infty}{}_mP$ 存在并等于 P，从而

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}{}_mP^{(n_0)}&=\lim_{m\to\infty}{}_mP_{m+1}P\cdots{}_{m+n_0-1}P\\&=\lim_{m\to\infty}{}_mP\lim_{m\to\infty}{}_{m+1}P\cdots\cdots\lim_{m\to\infty}{}_{m+n_0-1}P\end{aligned}$$

$$= P^{n_0}。\tag{65}$$

由假设 $p_{ij_0}(m,m+n_0) \geqslant a > 0$，$i \in S$，$m=0,1,\cdots$，及式（65）可知 P^{n_0} 的第 j_0 列元素全大于或等于 a，皆为正值，故 P^{n_0} 是马尔科夫矩阵。$0 < \mu(P^{n_0}) \leqslant \alpha(P^{n_0})$，而 P 是混合矩阵。于是根据定理 17，即可断言 X 是强遍历的。

现在证一致性。由 C-K 方程，对任何 $l=2,3,\cdots$，有

$$\begin{aligned}
&|p_{ij}(m'+n,m'+n+l) - p_{ij}(m''+n,m''+n+l)| \\
&= \Big|\sum_{k\in S}[p_{ik}(m'+n,m'+n+1)p_{kj}(m'+n+1,m'+n+l) \\
&\quad - p_{ik}(m''+n,m''+n+1)p_{kj}(m''+n+1,m''+n+l)]\Big| \\
&= \Big|\sum_{k\in S}[p_{ik}(m'+n,m'+n+1) - p_{ik}(m''+n,m''+n+1)] \\
&\quad \cdot p_{kj}(m'+n+1,m'+n+l) \\
&\quad + \sum_{k\in S}[p_{kj}(m'+n+1,m'+n+l) - p_{kj}(m''+n+1,m''+n+l)] \\
&\quad \cdot p_{ik}(m''+n,m''+n+1)\Big|。
\end{aligned}\tag{66}$$

对 n，$l=1,2,\cdots$，令

$$a_n(l) = \sup_{i\in S, m',m''>0} \sum_{j\in S} |p_{ij}(m'+n,m'+n+l) - p_{ij}(m''+n,m''+n+l)|,\tag{67}$$

由式 (66) 便得

$$a_n(l) \leqslant a_n(1) + a_{n+1}(l-1), \qquad l=2,3,\cdots,\tag{68}$$

比较式 (63) 与(67) 知 $a_n(1) = a_n, n=1,2,\cdots$，于是反复应用式 (68) 得

$$a_n(l) \leqslant \sum_{k=n}^{n+l-1} a_k, \qquad n,l=1,2,\cdots,\tag{69}$$

再应用 C-K 方程，对任何整数 l：$n_0 \leqslant l < n$，有

$$\begin{aligned}
p_{ij}(m',m'+n) - p_{ij}(m'',m''+n) &= \sum_{k\in S}[p_{ik}(m',m'+l) - p_{ik}(m'',m''+l)] \\
&\quad \times p_{kj}(m'+l,m'+n) + \sum_{k\in S}[p_{kj}(m'+l,m'+n) \\
&\quad - p_{kj}(m''+l,m''+n)]p_{ik}(m'',m''+l)。
\end{aligned}\tag{70}$$

注意到由假设条件，对任何 $m'=0,1,\cdots$，$l=n_0$，n_0+1，$\cdots$，及任何 $i \in S$ 有

$$p_{ij_0}(m',m'+l) = \sum_{k\in S} p_{ik}(m',m'+l-n_0)p_{kj_0}(m'+l-n_0,m'+l) \geqslant a,$$

因此，对任何 m'，$m''=0,1,\cdots$，$l=n_0$，n_0+1，$\cdots$，及任何 $i \in S$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in S}(p_{ik}(m',m'+l) - p_{ik}(m'',m''+l))^+ \\
&= -\sum_{k\in S}(p_{ik}(m',m'_{\circ}+l) - p_{ik}(m'',m''+l))^- \leqslant 1-a。
\end{aligned}\tag{71}$$

对任何正整数 n 及任何状态 $j \in S$，记

$$\underline{p}(n,j) = \inf_{m\geqslant 0, i\in S} p_{ij}(m,m+n), \quad \bar{p}(n,j) = \sup_{m\geqslant 0, i\in S} p_{ij}(m,m+n)。\tag{72}$$

考察式(70)右方的两个和式，由式(71)与式(72)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in S}[p_{ik}(m',m'+l) - p_{ik}(m'',m''+l)]p_{kj}(m'+l,m'+n) \\
&\leqslant \sum_{k\in S}[p_{ik}(m',m'+l) - p_{ik}(m'',m''+l)]^+ \bar{p}(n-l,j)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k\in S}[p_{ik}(m',m'+l)-p_{ik}(m'',m''+l)]^{-}\underline{p}(n-l,j)$$
$$\leqslant(1-a)(\bar{p}(n-l,j)-\underline{p}(n-l,j))。\tag{73}$$

由式(67)与式(69),

$$\left|\sum_{k\in S}[p_{kj}(m'+l,m'+n)-p_{kj}(m''+l,m''+n)]p_{ik}(m'',m''+l)\right|$$
$$\leqslant\sum_{j\in S}\sum_{k\in S}|p_{kj}(m'+l,m'+n)-p_{kj}(m''+l,m''+n)|p_{ik}(m'',m''+l)$$
$$\leqslant a_l(n-l)\sum_{k\in S}p_{ik}(m'',m''+l)\leqslant\sum_{k=l}^{n-1}a_k\leqslant\sum_{k=l}^{\infty}a_k。\tag{74}$$

将式(73)、式(74)代入式(70)中得

$$\bar{p}(n,j)-\underline{p}(n,j)\leqslant(1-a)(\bar{p}(n-l,j)-\underline{p}(n-l,j))+\sum_{k=l}^{\infty}a_k,\tag{75}$$

对任何整数 $l:n_0\leqslant l<n$，及任何状态 $j\in S$ 都成立。对 $\bar{p}(n-l,j)-\underline{p}(n-l,j)$ 又可应用式(75)，将结果代入式(75)中，如此类推，最后便得式

$$\bar{p}(n,j)-\underline{p}(n,j)\leqslant(1-a)^{\left[\frac{n}{l}\right]-1}+\left[1+(1-a)+\cdots+(1-a)^{\left[\frac{n}{l}\right]-2}\right]\sum_{k=l}^{\infty}a_k$$
$$\leqslant(1-a)^{\left[\frac{n}{l}\right]-1}+\left(\sum_{k=l}^{\infty}a_k/a\right)\tag{76}$$

对任何整数 l：$n_0\leqslant l<n$ 及任何 $j\in S$ 都成立。既然对任何 $m=0,1,\cdots,n=1,2,\cdots$，任何 $i,j\in S$，$p_{ij}(m,m+n)$ 与 π_j 显然都位于 $\underline{p}(n,j)$ 与 $\bar{p}(n,j)$ 之间，于是由式(76)便得式(64)。一致性也因此而得证，定理证完。

显然，在齐次的情况下，讨论遍历性的一致性是毫无意义的。试问：在齐次情形下，强遍历性与弱遍历性之间有何关系呢？

定理 20 设 X 是有限齐次马氏链，即${}_mP=P$，$m=0,1,\cdots$，则强遍历性与弱遍历性等价。

证 只要证明由弱遍历性可导致强遍历性即可。有限齐次马氏链 X 必存在平稳分布 π，即 $\pi'P=\pi'$，利用 C-K 方程与归纳法得 $\pi'P^n=\pi'$，$n=1,2,\cdots$，这表示 X 是渐近平稳的。再根据定理 15 知 X 是强遍历的，证毕。

当然，关于马氏链的渐近性质的研究并不只限于遍历性方面的探讨，还有其它方面的成果，这里不再一一列出。最后，仅仅不加证明地给出有关非齐次有限马氏链中心极限定理的一个基本结果，作为本章的结束。

定理 21[15] 对任何正整数 n，设 $X_0(n),\cdots,X_{n-1}(n)$ 是以${}_mP(n),m=0,1,\cdots$ 为转移概率矩阵的非齐次有限马氏链 $X(n)$ 的开头的 n 个随机变量，又设 $f_l^{(n)},l=0,\cdots,n-1$ 是定义在马氏链 $X(n)$ 的状态空间上的实值函数。令

$$T_n=\sum_{l=0}^{n-1}f_l^{(n)}(X_l(n)),\qquad n=1,2,\cdots,$$
$$\alpha_n=\min_{0\leqslant l<n-1}\alpha({}_lP(n)),\qquad n=1,2,\cdots。$$

如果函数 $f_l^{(n)}$ 一致有界，方差 $\mathrm{Var}[f_l^{(n)}(X_l(n))]\geqslant c>0,l=0,\cdots,n-1,n=1,2,\cdots$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n n^{1/3}=\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{T_n-E(T_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(T_n)}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t,\tag{77}$$

对所有实数 x 都成立。一般说来，如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n n^{1/3}<\infty$，此结果不再成立。

关于齐次马氏链的大数定律 与中心极限定理可以参看 Ⅱ. 定理 5 及杜布（Doob）的经典论著 [26]。

第六章　马尔科夫链的统计推断

对于马氏链 X，当它的转移概率 $p_{ij}(i, j\in S)$ 未知时，或转移概率是一未知参数 θ 的确定函数 $p_{ij}(\theta)$ 时，人们自然就要根据对 X 的实际观测所得到的数据，即样本，作出 p_{ij}或 θ 的估计 $\hat{p}_{ij}$或 $\hat{\theta}$ 。并希望这些估计 $\hat{p}_{ij}$、$\hat{\theta}$ 是在一定意义下具有良好性质的最佳估计。又当我们需要判定：马氏链的未知转移概率矩阵是否等于所指定的随机矩阵；转移概率 p_{ij}是否与 i 无关；多个马氏链是不是同质的；马氏链是不是 k 重的等等这一系列问题时，仍要根据 X 的样本通过假设检验，以求合理的具有一定可靠程度的判断。上面所提出的关于马氏链的统计推断论题，在马氏链的理论研究与实际应用中是极为重要的。早在六十年代就受到了人们的关注，至今已发表了不少的文章与论著，本章仅对主要的基本结果作一简要介绍。给出方法、思路、结论，而不追求严格的数学论证。

§1　最大似然估计

设 $X=\{X_0, X_1, \cdots\}$ 是有限齐次遍历的马氏链，其状态空间 $S=\{1, \cdots, N\}$，转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$，初始概率分布 $q_j=P(X_0=j)$，$j\in S$，平稳分布 $\pi=\{\pi_1, \cdots, \pi_N\}$，

$$\sum_{j\in S}\pi_j=1,\quad \pi_j>0,\quad \pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij},\qquad j\in S, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j,\qquad i,j\in S。\tag{2}$$

1. 转移概率的最大似然估计

先考虑非参数情形。令$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$是 X 的长度为 $n+1$ 的一个实现，那么，基于此样本的似然函数是

$$L=q_{x_0}\prod_{m=1}^{n}p_{x_{m-1}x_m}=q_{x_0}\prod_{i,j=1}^{N}p_{ij}^{n_{ij}}, \tag{3}$$

其中 n_{ij}是在 X 的样本$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$中，从状态 i 经过一步转移到状态 j 的频数，显然，N^2 个转移频数集 $\{n_{ij}\}$ 构成了转移矩阵 P 的一个充分统计量。

为求 L 关于 $p_{ij}(i, j\in S)$的最大值，将式(3)两边取对数得

$$\log L=\log q_{x_0}+\sum_{i,j=1}^{N}n_{ij}\log p_{ij}, \tag{4}$$

其中，$\{p_{ij}\}$ 受到式$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1$，$i\in S$的限制，因而 $\{p_{ij}\}$ 对每个给定的$i(\in S)$，实际上只有$N-1$个自由变量，现在取p_{i1}，…，p_{iN-1}为自由变量，而$p_{iN}=1-\sum_{k=1}^{N-1} p_{ik}$，将式(4)两边分别对$p_{ij}$，$i\in S$，$j\in S-\{N\}$求偏导得

$$\frac{\partial \log L}{\partial p_{ij}}=\frac{n_{ij}}{p_{ij}}-\frac{n_{iN}}{p_{iN}}, \qquad i\in S,\ j\in S-\{N\}, \tag{5}$$

令式(5)左方为零，则有

$$n_{ij}p_{iN}=n_{iN}p_{ij}, i\in S,\ j\in S-\{N\}, \tag{6}$$

将式(6)两边对$j\in S-\{N\}$求和可得

$$\sum_{j=1}^{N-1} n_{ij}p_{iN}=n_{iN}\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}=n_{iN}(1-p_{iN}), \qquad i\in S,$$

由此可见，若记$n_i=\sum_{j=1}^{N} n_{ij}$，则

$$p_{iN}=\frac{n_{iN}}{n_i}, \qquad i\in S, \tag{7}$$

把式(7)代入式(6)，便得p_{ij}的最大似然估计

$$\hat{p}_{ij}=\frac{n_{ij}}{n_i}, \qquad i,j\in S。 \tag{8}$$

在导出上面的估计值$\hat{p}_{ij}$的过程中，我们所假设的X的初始概率分布 $\{q_j, j\in S\}$ 并没有提供关于转移概率 $\{p_{ij}, i, j\in S\}$ 的任何信息。无论如何，对于大的n，式(4)中右方第一项的作用可以忽略不计。

其次，再考虑参数情形，假定转移概率是某未知参数$\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_k)$的已知函数$p_{ij}(\theta)$，$\theta\in R^k$，$R^k$是$k$维欧氏空间。那么，参数$\theta$的最大似然估计可通过求解下列方程组得到：

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta_r}=0, \qquad r=1,\cdots,k, \tag{9}$$

即

$$\sum_{i,j=1}^{N}\left[n_{ij}\frac{1}{p_{ij}(\theta)}\frac{\partial p_{ij}(\theta)}{\partial \theta_r}\right]=0, \qquad r=1,\cdots,k。 \tag{10}$$

然而，θ的非平凡充分统计量的存在性不是那么简单易得的。在单个参数的情形下，已给出了该参数的充分统计量存在性的充要条件。

因为状态空间S是有限的，而且$p_{iN}=1-\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}$，$i=1, \cdots, N$，因此我们能够把非参数情形当作为具有$N(N-1)$个参数 $\{p_{i1}, \cdots, p_{iN-1}, i=1, \cdots, N\}$ 的参数情形的特例。但是宁愿把它作为非参数情形是方便的。

试问上面所给出的最大似然估计量的渐近性质如何，是否具有相合性和渐近正态性。对此下面将作出明确的回答与论证。

为简单起见，假定在一个很长的时间内，过程持续不断地进行，即假定马氏链是平稳的。那么，可假设$q_j=P(X_0=j)=\pi_j$，$j\in S$。从而，对任何非负整数n，$q_j^{(n)}=P(X_n=j)=\pi_j$，$j\in S$。这里需要注意的是：因为平稳分布 $\{\pi_j, j\in S\}$ 满足方程

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij}, \qquad j = 1, \cdots, N,$$

所以假设 $q_j = \pi_j$，$j \in S$ 就包含有关于转移概率 p_{ij}，i，$j \in S$ 的信息。因而，在前面假定初始概率分布 $\{q_i\}$ 没有提供关于转移概率 $\{p_{ij}\}$ 的任何信息的前提条件下，所得到的 p_{ij}的最大似然估计 $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$，严格地说，在目前的情况下，它不再是 p_{ij}的最大似然估计了。但是，对于大的正整数 n，对数似然函数

$$\log L = \log \pi_{x_0} + \sum_{i,j=1}^{N} n_{ij} \log p_{ij}, \tag{11}$$

并受上式右方的第二项的控制或支配。所以我们可以写

$$\log L \approx \sum_{i,j=1}^{N} n_{ij} \log p_{ij}, \tag{12}$$

因此，就渐近理论而言，考虑 $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$已足够了。

容易看出：$n_i = \sum_{j=1}^{N} n_{ij} = \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{iX_m}$，$i \in S$。于是由 X 的平稳性假设有

$$E(n_i) = \sum_{m=0}^{n-1} E\delta_{iX_m} = \sum_{m=0}^{n-1} P(X_m = i) = \sum_{m=0}^{n-1} \pi_i = n\pi_i, \qquad i \in S$$

故
$$E\left(\frac{n_i}{n}\right) = \pi_i, \quad i \in S。\tag{13}$$

依假设，现在论及的 X 是有限齐次平稳遍历的马氏链，而且式(13)成立。那么，参见Ⅱ. 定理 5 或文献 [10] 中的循环事件理论，便知：对任何 $i \in S$，当 $n \to \infty$时，$\frac{n_i}{n}$依概率收敛于 $E\left(\frac{n_i}{n}\right) = \pi_i$。

记为
$$P\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_i}{n}\right) = E\left(\frac{n_i}{n}\right) = \pi_i, \quad i \in S,$$

或
$$\frac{n_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} E\left(\frac{n_i}{n}\right) = \pi_i, \quad i \in S。\tag{14}$$

现在可证下列关于 $\hat{p}_{ij}$，i，$j \in S$ 的渐近分布的重要结果。

定理 1 令 $\phi = (p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1N}, \cdots, p_{N1}, p_{N2}, \cdots, p_{NN})'$是 $N^2 \times 1$ 参数向量，$\zeta = (\hat{p}_{11}, \hat{p}_{12}, \cdots, \hat{p}_{1N}, \cdots, \hat{p}_{N1}, \hat{p}_{N2}, \cdots, \hat{p}_{NN})'$是相应于 ϕ 的 $N^2 \times 1$ 估计向量，其中 $\hat{p}_{ij} = n_{ij}/n_i$，$i$，$j \in S$，则 $\sqrt{n}(\zeta - \phi)$在 $n \to \infty$时，依分布收敛到 N^2 维正态分布 $\mathscr{N}_{N^2}(O, V)$，记为

$$\sqrt{n}(\zeta - \phi) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{d. f.}} \mathscr{N}_{N^2}(O, V) 。\tag{15}$$

其中 V 是 $N^2 \times N^2$ 协方差矩阵，V 的第 u 行第 v 列元素 σ_{uv}，u，$v = 1, \cdots, N^2$，由下式给出：如果 $u = (i-1)N + j$，$v = (i'-1)N + j'$，i，j，i'，$j' = 1, \cdots, N$，则

$$\sigma_{uv} = \sigma_{ij,i'j'} = \frac{1}{\pi_i}\{\delta_{ii'}(\delta_{jj'} p_{ij} - p_{ij} p_{i'j'})\}, \tag{16}$$

这里 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j。\end{cases}$

证 我们仅给出证明的关键步骤。对于固定的 i，n_i 是随机的，在 n_i 取一定值的前提下，随机向量$(n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{iN})$的概率性质与服从多项分布的随机向量相像，即

$$P(n_{i1}=x_1,\cdots,n_{iN}=x_N)=\begin{cases}0, & x_N\neq n_i-x_1-\cdots-x_{N-1},\\ \dfrac{n_i!}{x_1!\cdots x_N!}p_{i1}^{x_1}\cdots p_{iN}^{x_N}, & x_N=n_i-x_1-\cdots-x_{N-1},\end{cases}\tag{17}$$

$$E(n_{ij})=n_ip_{ij},\quad D(n_{ij})=n_ip_{ij}(1-p_{ij}),\qquad i,j\in S,\tag{18}$$

$$\mathrm{Cov}(n_{ij},n_{ik})=-n_ip_{ij}p_{ik},\qquad i,j,k\in S,\quad j\neq k。\tag{19}$$

当 n 相当大时，随机的 n_i 可用一个固定的量 $[n\pi_i]$ 即 $E(n_i)$的整数部分来代替。于是式(18)、(19)可改写成

$$E(n_{ij})\approx[n\pi_i]p_{ij},\quad D(n_{ij})\approx[n\pi_i]p_{ij}(1-p_{ij}),\tag{20}$$

$$\mathrm{Cov}(n_{ij},n_{ik})\approx-[n\pi_i]p_{ij}p_{ik}。\quad i,j,k\in S,\quad j\neq k。\tag{21}$$

作随机变量：

$$U_{ij}=\frac{n_{ij}-[n\pi_i]p_{ij}}{\sqrt{n}\,\pi_i},\qquad i,j\in S,\tag{22}$$

由式(20)，$E(U_{ij})$近似地看作为零。又注意到对不同的 i，i'，U_{ij}与 $U_{i'j'}$相互独立，故当 $i\neq i'$ 时，$\mathrm{Cov}(U_{ij},\ U_{i'j'})\approx0$。当 $i=i'$，而 $j\neq j'$时，由式(20)、(21)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\ (U_{ij},\ U_{i'j'})&\approx E(U_{ij}U_{ij'})\\&=\frac{1}{n\pi_i^2}\{E(n_{ij}n_{ij'})-[n\pi_i]p_{ij'}E(n_{ij})-[n\pi_i]p_{ij}E(n_{ij'})+[n\pi_i]^2p_{ij}\,p_{ij'}\}\\&\approx\frac{1}{\pi_i}(-p_{ij}p_{ij'})。\end{aligned}\tag{23}$$

当 $i=i'$，$j=j'$时，由式(20)得

$$\mathrm{Cov}(U_{ij},U_{i'j'})\approx\frac{1}{n\pi_i^2}D(n_{ij})\approx\frac{1}{\pi_i}p_{ij}(1-p_{ij})。\tag{24}$$

综合以上讨论的结果式(23)、(24)得

$$\mathrm{Cov}(U_{ij},U_{i'j'})\approx\frac{\delta_{ii'}p_{ij}(\delta_{jj'}-p_{i'j'})}{\pi_i},\qquad i,j,i',j'\in S。\tag{25}$$

因此$(U_{11},\ U_{12},\ \cdots,\ U_{1N},\ \cdots,\ U_{N1},\ U_{N2},\ \cdots,\ U_{NN})$ 在 $n\to\infty$时是联合渐近正态的[29]，渐近分布是均值为零，协方差阵为$\left[\dfrac{\delta_{ii'}p_{ij}(\delta_{jj'}-p_{i'j'})}{\pi_i}\right]$的正态分布。

能够证实：对任意的 i，$j\in S$ 有

$$\frac{n_{ij}-[n\pi_i]p_{ij}}{\sqrt{n}}-\frac{n_{ij}-n_ip_{ij}}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{P}0。\tag{26}$$

这样，对任何 i，$j\in S$，令

$$U_{ij}^*=\frac{n_{ij}-n_ip_{ij}}{\sqrt{n}\,\pi_i},\quad W_{ij}=\sqrt{n}(\hat{p}_{ij}-p_{ij})=\frac{U_{ij}^*\pi_i}{n_i/n},\tag{27}$$

由式(26)及式(14)，并利用依概率收敛及依分布收敛的性质[28]，便知U_{ij}^*与U_{ij}有同样的渐近分布，W_{ij}与U_{ij}^*有相同的渐近分布。进而，$(U_{11}^*,\ U_{12}^*,\ \cdots,\ U_{1N}^*,\ \cdots,\ U_{N1}^*,\ U_{N2}^*,\ \cdots,\ U_{NN}^*)$与$(U_{11},\ U_{12},\ \cdots,\ U_{1N},\ \cdots,\ U_{N1},\ U_{N2},\ \cdots,\ U_{NN})$有相同的渐近联合分布，而$(W_{11},\ W_{12},\ \cdots,\ W_{1N},\ \cdots,\ W_{N1},\ W_{N2},\ \cdots,\ W_{NN})$与$(U_{11}^*,\ U_{12}^*,\ \cdots,\ U_{1N}^*,\ \cdots,\ U_{N1}^*,\ U_{N2}^*,\ \cdots,\ U_{NN}^*)$有相同的渐近联合分布。定理得证。

在参数的情形下，最大似然估计的渐近分布可陈述如下．先考虑单参数情形。

定理 2 令 $\hat{\theta}$ 是下列似然方程的相合根：

$$\sum_{i,j\in S}\frac{n_{ij}}{p_{ij}(\theta)}\frac{dp_{ij}(\theta)}{d\theta}=0 \tag{28}$$

假设满足下列正则性条件：

(i) 对所有的 i，$j\in S$，$p_{ij}(\theta)=p_{ij}(\eta)$蕴含有 $\theta=\eta$；

(ii) 对任何 i，$j\in S$，$p_{ij}(\theta)$容有在真值 θ_0 处关于 θ 的连续二阶导数；

(iii) 至少有一个$\left(\frac{dp_{ij}(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}$是非零的。

那么，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta_0)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d.f.}}\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{f(\theta_0)}\right), \tag{29}$$

其中，
$$f(\theta_0)=\sum_{i,j\in S}\frac{\pi_i(\theta_0)}{p_{ij}(\theta_0)}\left(\frac{dp_{ij}(\theta)}{d\theta}\right)^2_{\theta_0}, \tag{30}$$

f 是费歇耳(Fisher)信息函数，在式(30)中仅对正的 $p_{ij}(\theta_0)$项求和。

定理 2 的证明再次利用了关于参数情形下多项分布的最大似然估计的类推结果[28]。定理 2 的结论可以推广到多个参数的情形，如下面的定理所述。

定理 3 令 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$是在 k 维欧氏空间中取值的 k 维向量。以 $F=[\sigma_{uv}]$ 表示$k\times k$费歇耳信息矩阵，其中

$$\sigma_{uv}=\sum_{i,j\in S}\left\{\frac{\pi_i(\theta_0)}{p_{ij}(\theta_0)}\left(\frac{\partial p_{ij}(\theta)}{\partial\theta_u}\right)_{\theta_{u0}}\left(\frac{\partial p_{ij}(\theta)}{\partial\theta_v}\right)_{\theta_{v0}}\right\}, \tag{31}$$

$\theta_0=(\theta_{10},\cdots,\theta_{k0})$，并假设 F 是非奇异的，那么，当 $n\to\infty$时 $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta_0)$依分布收敛于$\mathcal{N}_k(O,F^{-1})$，即

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta_0)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d.f.}}\mathcal{N}_k(O,F^{-1})。 \tag{32}$$

2. 序列相关的渐近分布

序列相关是对观测序列的逐个序对之间相依性的一种自然的度量。在本段中，我们定义了状态空间 S 为 $\{1,\cdots,N\}$ 的有限、平稳、遍历、齐次马氏链 X 的自相关，然后提出了它的一种自然的估计量(一阶样本序列相关)，还推导出此估计量的渐近分布，并与最大似然估计量的渐近性质作了比较。

因为假设 X 是平稳的，所以有

$$q_i^{(n)}=P(X_n=i)=\pi_i,\qquad n=0,1,\cdots,\ i\in S。 \tag{33}$$

马氏链 X 的**一阶自相关** ρ 由下式定义，即

$$\rho=\frac{\text{Cov}(X_n,X_{n+1})}{D(X_n)},\qquad n=0,1,\cdots, \tag{34}$$

仍因 X 是平稳的，故 ρ 与 n 无关。若记

$$F(i,j)=P(X_n=i,X_{n+1}=j)=\pi_i p_{ij},\qquad i,j\in S,\quad n=0,1,\cdots, \tag{35}$$

显然
$$\sum_{j\in S}F(i,j)=\pi_i,\quad i\in S,\quad \sum_{i\in S}F(i,j)=\pi_j,\quad j\in S。 \tag{36}$$

而且，由式(34)定义的自相关 ρ 可写成下式：

$$\rho=\frac{\sum_{i,j\in S}ijF(i,j)-\left(\sum_{i,j\in S}iF(i,j)\right)^2}{\sum_{i,j\in S}i^2F(i,j)-\left(\sum_{i,j\in S}iF(i,j)\right)^2},\tag{37}$$

将式(37)右方记作 $g(F(i,\ j))$。

设$(x_1,\cdots,x_n)$是 X 的长度为 n 的一个实现基于这些观测值之上的一阶(循环)序列相关 R 定义为

$$R=\frac{\sum_{m=1}^{n}(x_m-\bar{x})(x_{m+1}-\bar{x})}{\sum_{m=1}^{n}(x_m-\bar{x})^2},\tag{38}$$

其中 $\bar{x}=\sum_{m=1}^{n}x_m/n$，而且 x_{n+1}由 x_1 替代。以 n_{ij}记在修正样本$(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ x_1)$中，由状态 i 转移到状态 j 的样本转移频数。于是，

$$\sum_{i,j\in S}n_{ij}=n,\quad \sum_{j\in S}n_{ij}=\sum_{k\in S}n_{ki}=n_i,\quad i\in S,\tag{39}$$

其中 n_i 是在样本$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$中状态 i 出现的频数。若记 $\hat{F}(i,\ j)=\frac{n_{ij}}{n}$，由式(38)、式(39)及式(37)知

$$R=\frac{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}x_mx_{m+1}-\bar{x}^2}{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}x_m^2-\bar{x}^2}=\frac{\sum_{i,j\in S}ij\frac{n_{ij}}{n}-\left(\sum_{i\in S}i\frac{n_i}{n}\right)^2}{\sum_{i\in S}i^2\frac{n_i}{n}-\left(\sum_{i\in S}i\frac{n_i}{n}\right)^2}=g(\hat{F}(i,j))。\tag{40}$$

因为

$$\frac{n_i}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}\pi_i,\quad \frac{n_{ij}}{n_i}\xrightarrow[n\to\infty]{P}p_{ij},\quad i,j\in S,$$

以及函数 g 的连续性，便可断定下面的结论：

$$\hat{F}(i,j)=\frac{n_{ij}}{n}=\frac{n_i}{n}\cdot\frac{n_{ij}}{n_i}\xrightarrow[n\to\infty]{P}\pi_ip_{ij}=F(i,j),\quad i,j\in S,\tag{41}$$

$$R=g(\hat{F}(i,j))\xrightarrow[n\to\infty]{P}g(F(i,j))=\rho。\tag{42}$$

定理 4 由式(38)定义的估计 R 是由式(37)定义的自相关 ρ 的相合估计量。

为了考察 R 的渐近分布，需要先给出下面的结果。

定理 5 令 $F(i,\ j)=P(X_n=i,\ X_{n+1}=j)=\pi_ip_{ij}$，$n=0,\ 1,\ \cdots$，$\hat{F}(i,\ j)=\frac{n_{ij}}{n}$，$i,\ j\in S$，$\mathbf{T}=(F(1,\ 1),\ \cdots,\ F(1,\ N),\ \cdots,\ F(N,\ 1),\ \cdots,\ F(N,\ N))'$，$\mathbf{T}_n=(\hat{F}(1,\ 1),\ \cdots,\ \hat{F}(1,\ N),\ \cdots,\ \hat{F}(N,\ 1),\ \cdots,\ \hat{F}(N,\ N))'$，$n=0,\ 1,\ \cdots$，$\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{T}_n$ 皆为 $N^2\times1$ 向量。则

$$\sqrt{n}(\mathbf{T}_n-\mathbf{T})\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d.f.}}N_{N^2}(O,\textstyle\sum),\tag{43}$$

协方差矩阵$\sum$中的元素由下式给出：对任何i，j，i'，$j'\in S$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,i'j'}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(n_{ij},\ n_{i'j'})\\&=\pi_i p_{ij}(\delta_{ii'}\delta_{jj'}-\pi_{i'}p_{i'j'})+p_{ij}p_{i'j'}(\pi_i c_{ji'}+\pi_{i'}c_{j'i}),\end{aligned}\tag{44}$$

其中 $c_{uv}=\sum_{m=0}^{\infty}(p_{uv}^{(m)}-\pi_v)$，　$\delta_{uv}=\begin{cases}1, & u=v\\0, & u\neq v,\end{cases}$　u，$v\in S$。

证　定义随机变量

$$z_{ij}^{(m)}=\begin{cases}1, & \text{如果 } X_m=i,X_{m+1}=j,\\0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$m=1,2,\cdots,n,i,j\in S,\quad X_{n+1}\equiv X_1,\tag{45}$$

那么　$E(z_{ij}^{(m)})=P(X_m=i,\ X_{m+1}=j)=\pi_i p_{ij}$，$m=1$，$2$，$\cdots$，$n$，　i，$j\in S$，　(46)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}(z_{ij}^{(m)}-E(z_{ij}^{(m)}))&=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}(z_{ij}^{(m)}-\pi_i p_{ij})\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}(n_{ij}-n\pi_i p_{ij})\\&=\sqrt{n}(\hat{F}(i,\ j)-F(i,\ j)),\quad i,\ j\in S。\end{aligned}\tag{47}$$

将有限遍历齐次马氏链的中心极限定理[26]应用到定义在逐个状态对上的随机变量序列$z_{ij}^{(m)}$，$m=1$，2，$\cdots$上，i，$j\in s$，便可发现

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(z_{ij}^{(m)}-E(z_{ij}^{(m)}))&=\sqrt{n}(\hat{F}(i,j)-F(i,j))\\&\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d. f.}}\mathcal{N}(O,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}D(n_{ij})),\quad i,j\in S。\end{aligned}\tag{48}$$

现在，将马氏链的中心极限定理用到每个线性组合$\sum_{i,j\in S}a_{ij}z_{ij}^{(m)}$，$m=1$，$2$，$\cdots$上，便证明了$\{\sqrt{n}(\hat{F}(i,\ j)-F(i,\ j)),\ i,\ j\in S\}$的任一线性组合当$n\to\infty$时都是渐近正态的，因此($\sqrt{n}(\hat{F}(1,\ 1)-F(1,\ 1))$，$\cdots$，$\sqrt{n}(\hat{F}(1,\ N)-F(1,\ N))$，$\cdots$，$\sqrt{n}(\hat{F}(N,\ 1)-F(N,\ 1))$，$\cdots$，$\sqrt{n}(\hat{F}(N,\ N)-F(N,\ N))$)，当$n\to\infty$时是渐近联合正态的。

剩下只要证明式(43)中的协方差矩阵$\sum$是由式(44)给出。为此目的，作如下计算。

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(n_{ij},\ n_{i'j'})&=\mathrm{Cov}\Big(\sum_{m=1}^{n}z_{ij}^{(m)},\ \sum_{m=1}^{n}z_{i'j'}^{(m)}\Big)\\&=E\Big\{\Big(\sum_{m=1}^{n}z_{ij}^{(m)}\Big)\Big(\sum_{m=1}^{n}z_{i'j'}^{(m)}\Big)-E\Big(\sum_{m=1}^{n}z_{ij}^{(m)}\Big)E\Big(\sum_{m=1}^{n}z_{i'j'}^{(m)}\Big)\Big\}\\&=E\Big\{\sum_{m=1}^{n}z_{ij}^{(m)}z_{i'j'}^{(m)}+\sum_{\substack{m,m'=1\\m\neq m'}}^{n}z_{ij}^{(m)}z_{i'j'}^{(m')}\Big\}\\&\quad-E\Big(\sum_{m=1}^{n}z_{ij}^{(m)}\Big)E\Big(\sum_{m=1}^{n}z_{i'j'}^{(m)}\Big),\quad i,\ j,\ i',\ j'\in S。\end{aligned}\tag{49}$$

因为由定义知

$$z_{ij}^{(m)}z_{i'j'}^{(m)}=\begin{cases}1, & \text{当且仅当 } i=i',j=j',\\0, & \text{其它}\end{cases}\qquad i,j,i',j'\in S,$$

所以必有

$$E(z_{ij}^{(m)} z_{i'j'}^{(m)}) = \delta_{ii'}\delta_{jj'}\pi_i p_{ij}, \quad i,j,i',j' \in S, \quad m = 1,\cdots,n 。$$

$$\mathrm{Cov}\,(n_{ij}, n_{i'j'}) = n\delta_{ii'}\delta_{jj'}\pi_i p_{ij} - n^2\pi_i p_{ij}\pi_{i'} p_{i'j'} + \sum_{\substack{m,m'=1\\ m\neq m'}}^{n} E(z_{ij}^{(m)} z_{i'j'}^{(m')}), \quad i,j,i',j' \in S。 \tag{50}$$

依 $z_{ij}^{(m)}$ 的定义，

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m,m'=1\\ m\neq m'}}^{n} E(z_{ij}^{(m)} z_{i'j'}^{(m')}) &= \sum_{\substack{m,m'=1\\ m\neq m'}}^{n} P(X_m=i,\ X_{m+1}=j,\ X_{m'}=i',\ X_{m'+1}=j') \\
&= \sum_{m=1}^{n-3}\Big(\sum_{m'=m+2}^{n-1} \pi_i p_{ij} p_{ji'}^{(m'-m-1)} p_{i'j'}\Big) + (n-2)\pi_i p_{ij}\delta_{ji'} p_{i'j'} \\
&\quad + \sum_{m'=1}^{n-3}\Big(\sum_{m=m'+2}^{n-1} \pi_{i'} p_{i'j'} p_{j'i}^{(m-m'-1)} p_{ij}\Big) + (n-2)\pi_{i'} p_{i'j'}\delta_{j'i} p_{ij} \\
&= \sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)\pi_i p_{ij} p_{ji'}^{(l)} p_{i'j'} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)\pi_{i'} p_{i'j'} p_{j'i}^{(l)} p_{ij}。
\end{aligned} \tag{51}$$

将式(51)代入式(50)便得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Cov}(n_{ij},\ n_{i'j'})}{n} &= \pi_i p_{ij}(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - \pi_{i'} p_{i'j'}) - (n-1)\pi_i p_{ij}\pi_{i'} p_{i'j'} \\
&\quad + p_{ij} p_{i'j'} \frac{1}{n}\Big[\sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)\pi_{i'} p_{j'i}^{(l)} + \sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)\pi_i p_{ji'}^{(l)}\Big] \\
&= \pi_i p_{ij}(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - \pi_{i'} p_{i'j'}) + p_{ij} p_{i'j'}\Big[\frac{\pi_{i'}}{n}\sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1) \\
&\quad \times (p_{j'i}^{(l)} - \pi_i) + \frac{\pi_i}{n}\sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)(p_{ji'}^{(l)} - \pi_{i'})\Big]。
\end{aligned} \tag{52}$$

利用马氏链是遍历的假定以及Ⅳ. 定理 9 知级数 $\sum_{l=0}^{\infty}(p_{j'i}^{(l)} - \pi_i)$ 与 $\sum_{l=0}^{\infty}(p_{ji'}^{(l)} - \pi_{i'})$ 是绝对收敛的，于是对任给的 $\varepsilon>0$，必存在正整数 M 使 $\sum_{l=M+1}^{\infty}|p_{j'i}^{(l)} - \pi_i| < \frac{\varepsilon}{2}$，当 $n>M+2$ 时，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)(p_{j'i}^{(l)} - \pi_i) - \sum_{l=0}^{n-2}(p_{j'i}^{(l)} - \pi_i)\right| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{M}\frac{l+1}{n}|p_{j'i}^{(l)} - \pi_i| + \sum_{l=M+1}^{n-2}|p_{j'i}^{(l)} - \pi_i| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{M}\frac{l+1}{n}|p_{j'i}^{(l)} - \pi_i| + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

当 n 足够大时可使 $\sum_{l=0}^{M}\frac{l+1}{n}|p_{j'i}^{(l)} - \pi_i| < \frac{\varepsilon}{2}$，由此可见

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)(p_{j'i}^{(l)} - \pi_i) = \sum_{l=0}^{\infty}(p_{j'i}^{(l)} - \pi_i), \tag{53}$$

同理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)(p_{ji'}^{(l)} - \pi_{i'}) = \sum_{l=0}^{\infty}(p_{ji'}^{(l)} - \pi_{i'})。 \tag{54}$$

在式(52)的两边，令 $n\to\infty$ 取极限，将式(53)、(54)代入即得式(44)，定理得证。

现在可以给出序列相关 R 的渐近分布了。

定理 6 $\sqrt{n}(R-\rho)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d.f.}}\mathscr{N}(0,\ \sigma_R^2)$ (55)

其中 $\sigma_R^2=G'\sum G$，$G'=\left(\frac{\partial g}{\partial F(1,\ 1)},\ \cdots,\ \frac{\partial g}{\partial F(N,\ N)}\right)$是 $1\times N^2$ 向量，g 是一阶自相关 ρ 的表达式(37)中作为 N^2 个变量 $F(i,\ j)$，$i,\ j\in S$ 的函数。

证 因为式(40)，$R=g(\hat{F}(i,\ j))$，以及定理 5 已证实的关于 $T_n=(\hat{F}(1,\ 1),\ \cdots,\ \hat{F}(1,\ N),\cdots,\ \hat{F}(N,\ 1),\ \cdots,\ \hat{F}(N,\ N))$的极限结果，又 g 是 N^2 元连续可微函数，应用众所周知的收敛定理[28]便得所述的结果。

如果 $\{X_0,\ X_1,\ \cdots\}$ 是相互独立的具有相同分布 $\{\pi_i,\ i\in S\}$ 的随机变量序列，易证实

$$\sqrt{n}\,R\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d.f.}}\mathscr{N}(0,1)。\tag{56}$$

在参数的情形中，即假设转移概率 $p_{ij},i,j\in S$ 是单个参数 θ 的函数 $p_{ij}(\theta),i,j\in S,\rho(\theta)=g(F(i,\ j,\ \theta))=g(\pi_i p_{ij}(\theta))$，将它写作 $h(\theta)$，并设 $h(\theta)$是 θ 的一对一函数，那么，自相关的最大似然估计 $\hat{\rho}$ 明显地是 $h(\hat{\theta})$，这里 $\hat{\theta}$ 是通过求解似然方程

$$\sum_{i,j\in S}\frac{n_{ij}}{p_{ij}(\theta)}\frac{dp_{ij}(\theta)}{d\theta}=0,$$

所得到的 θ 的最大似然估计。由定理 2，

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}-\theta_0)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d.f.}}\mathscr{N}\left(0,\frac{1}{f(\theta_0)}\right)。$$

其中 $f(\theta_0)=\sum\limits_{i,j\in S}\frac{\pi_i(\theta_0)}{p_{ij}(\theta_0)}\left(\frac{dp_{ij}(\theta)}{d\theta}\right)^2_{\theta_0}$。

再由众所周知的收敛性结果，便有下面的定理。

定理 7 $\sqrt{n}(\hat{\rho}-\rho_0)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d.f.}}\mathscr{N}(0,\ \sigma_\rho^2)$, (57)

其中，$\sigma_\rho^2=\left(\frac{dh(\theta)}{d\theta}\right)^2\theta_0 f(\theta_0)$。 (58)

在目前的参数情形($h(\theta)$是 θ 的一对一函数)的处理中，我们有两种可供选择的 ρ 的估计，即 R 与 $\hat{\rho}$。注意到 R 虽然是基于 $F(i,\ j)$的最大似然估计 $\hat{F}(i,\ j)$之上而建立的估计，但是一般说来 R 与 $\hat{\rho}$ 未必等同。而且，由最大似然有效性，我们应期望[27]

$$\sigma_R^2\geqslant\sigma_\rho^2。\tag{59}$$

在下一节还会看到，估计量 R(或 $\hat{\rho}$，当它能适用时)在关于转移概率的某些假设检验问题中是有用的。

§2 假设检验

§1 中所给出的结果可以用来对于所考查的马氏链的各种假设进行显著性检验。

1. χ^2 检验

(1) 特定转移矩阵的检验

现在提出如下需要检验的假设：

$$H:\quad p_{ij}=p_{ij}(0),\quad i,j\in S=\{1,\cdots,N\},\tag{60}$$

其中，对任一固定的 $i\in S$，$\{p_{ij}(0),\ j=1,\ \cdots,\ N\}$ 都是一个给定的概率分布，即 $P(0)=[p_{ij}(0)]$是给定的 $N\times N$ 转移概率随机矩阵。为了度量来自样本$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$的 p_{ij}的最大似然估计量 $\hat{p}_{ij}=\frac{n_{ij}}{n_i}$与 $p_{ij}(0)$，$i,\ j\in S$ 之间的差别大小，考虑库尔贝克-莱布勒(Kullback-Leibler)信息函数，即

$$K_n^{(i)}=\sum_{j=1}^{N}p_{ij}(0)\log\frac{p_{ij}(0)}{p_{ij}},\qquad i\in S。\tag{61}$$

利用近似公式：$\log x\approx\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$，$x\geqslant\frac{1}{2}$，在 $\hat{p}_{ij}$与 $p_{ij}(0)$接近时，可得

$$\begin{aligned}K_n^{(i)}&\approx\sum_{j=1}^{N}p_{ij}(0)\left[(1-(\hat{p}_{ij}/p_{ij}(0)))+\frac{1}{2}(1-(\hat{p}_{ij}/p_{ij}(0)))^2\right]\\&=\sum_{j=1}^{N}p_{ij}(0)\left[\frac{n_ip_{ij}(0)-n_{ij}}{n_ip_{ij}(0)}+\frac{1}{2}\left(\frac{n_ip_{ij}(0)-n_{ij}}{n_ip_{ij}(0)}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{(n_ip_{ij}(0)-n_{ij})^2}{n_i^2p_{ij}(0)},\qquad i\in S。\end{aligned}\tag{62}$$

作 $K_n^{(i)}$，$i\in S$ 的加权平均

$$\sum_{i=1}^{N}n_iK_n^{(i)}\approx\frac{1}{2}\sum_{i,j\in S}\frac{(n_{ij}-n_ip_{ij}(0))^2}{n_ip_{ij}(0)},\tag{63}$$

将式(63)右方写作$\frac{1}{2}\phi$。对任意给定的 $i\in S$，固定的 n_i，与观测频数 n_{i1}，…，n_{iN}，$\sum_{j=1}^{N}n_{ij}=n_i$ 相应的理论频数为 $n_ip_{i1}(0)$，…，$n_ip_{iN}(0)$，而$\sum_{j=1}^{N}(n_{ij}-n_ip_{ij}(0))^2/n_ip_{ij}(0)$实际上是 χ^2 拟合优度统计量，由皮尔逊(K. Pearson)定理，当 $n\to\infty$时，从而 $n_i\to\infty$时，在假设 H 为真的前提下，$\sum_{j=1}^{N}(n_{ij}-n_ip_{ij}(0))^2/n_ip_{ij}(0)$的分布收敛于自由度为 $N-1$ 的 χ^2 分布。从而，统计量

$$\phi=\sum_{i,j\in S}(n_{ij}-n_ip_{ij}(0))^2/n_ip_{ij}(0)\tag{64}$$

是相应于转移矩阵的 N 个行的 N 个独立的 χ^2 统计量之和，而且，当 $n\to\infty$时，ϕ 的渐近分布是具有自由度为 $N(N-1)$的 χ^2 分布。显然，上面的讨论是在假定了所有 p_{ij}，$i,\ j\in S$ 都是正的前提下进行的。更一般地，假定 d_i 表示转移概率矩阵 P 的第 i 行中正元素的个数，d 是 P 中正元素的总数，令 $D_i=\{j:\ p_{ij}>0\}$，那么

$$\phi=\sum_{i\in S}\sum_{j\in D_i}(n_{ij}-n_ip_{ij}(0))^2/n_ip_{ij}(0)\tag{65}$$

具有自由度为$\sum_{i=1}^{N}(d_i-1)=d-N$ 的 χ^2 极限分布。

检验假设 H：$p_{ij}=p_{ij}(0)$，$i,\ j\in S$ 的似然比统计量由下式给出：

$$\begin{aligned}\lambda^*&=-2\log\lambda=-2\log\frac{P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n|P(0))}{P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n|\hat{P})}\\&=-2\log\frac{p_{x_1x_2}(0)\cdots p_{x_{n-1}x_n}(0)}{\hat{p}_{x_1x_2}\cdots\hat{p}_{x_{n-1}x_n}}=-2\log\prod_{i,j\in S}\left(\frac{p_{ij}(0)}{\hat{p}_{ij}}\right)^{n_{ij}}\\&=-2\sum_{i,j\in S}n_{ij}\log\frac{p_{ij}(0)n_i}{n_{ij}}。\end{aligned}\tag{66}$$

注意到在假设 H 为真的前提下，$\lambda^* - \phi \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$。

因此统计量 ϕ 是检验假设 H 的一个合理的尺度。在指定的显著性水平 α 之下，从 χ^2 分布表上查出满足式 $P(\chi^2_{N(N-1)} \geqslant \chi^2_{N(N-1)}(\alpha)) = \alpha$ 的值 $\chi^2_{N(N-1)}(\alpha)$，然后根据 $\phi \geqslant \chi^2_{N(N-1)}(\alpha)$ 是或否，而作出拒绝或接受假设 H 的推断。

(2) 独立性检验

在平稳的马尔科夫相依性假定的范围内，随机变量序列 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 的独立性的假设是采取了如下的形式：

$$H:\quad p_{ij} = \pi_j, \qquad i,j \in S = \{1,\cdots,N\}。 \tag{67}$$

因为在此 H 为真时，应用马氏性、齐次性、平稳性，对任何 $n \geqslant 0$，$m \geqslant 1$，

$$\begin{aligned} P(X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \cdots, X_{n+m} = i_m) &= P(X_n = i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{m-1} i_m} \\ &= P(X_n = i_0) \pi_{i_1} \cdots \pi_{i_m} = P(X_n = i_0) P(X_{n+1} = i_1) \cdots P(X_{n+m} = i_m), \\ & i_0, i_1 \cdots, i_m \in S。 \end{aligned}$$

这里，平稳概率分布 $\{\pi_j, j \in S\}$ 并未特别指定。在假设 H 之下，我们仅有 N 个受到约束 $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$ 限制的参数 $(\pi_1, \cdots, \pi_N)$。容易求出，在假设 H 之下 π_j 的最大似然估计量是 n_j/n，$j \in S$，这里 n_j 是在样本 $(x_1, \cdots, x_n)$ 中状态 j 出现的频数。事实上，利用平稳性、马氏性条件，以及 $\sum_{j=1}^{N} n_j = n$，在假设 H 之下，似然函数 L 呈下面的形式：

$$\begin{aligned} L &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \pi_{x_1} p_{x_1 x_2} \cdots p_{x_{n-1} x_n} \\ &= \pi_{x_1} \pi_{x_2} \cdots \pi_{x_n} = \prod_{j=1}^{N-1} \pi_j^{n_j} \Big(1 - \sum_{j=1}^{N-1} \pi_j \Big)^{n_N}, \end{aligned}$$

于是

$$\log L = \sum_{j=1}^{N-1} n_j \log \pi_j + n_N \log \Big(1 - \sum_{j=1}^{N-1} \pi_j \Big),$$

对 j：$1 \leqslant j \leqslant N-1$，

$$0 = \frac{\partial \log L}{\partial \pi_j} = n_j \frac{1}{\pi_j} + n_N \frac{-1}{\Big(1 - \sum_{j=1}^{N-1} \pi_j\Big)},$$

即

$$n_N/\pi_N = n_j/\pi_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N-1,$$

或

$$\pi_j = n_j \pi_N / n_N, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N-1, \tag{68}$$

由式(68)有

$$1 - \pi_N = \sum_{j=1}^{N-1} \pi_j = \sum_{j=1}^{N-1} n_j \pi_N / n_N = (n - n_N) \pi_N / n_N,$$

从而求得最大似然估计量 $\hat{\pi}_j = n_j/n$，$1 \leqslant j \leqslant N$。不顾初始状态如何，如前已证，$p_{ij}$ 的最大似然估计量是 n_{ij}/n_i。作为检验假设 H 的尺度的 χ^2 统计量和似然比统计量分别依次为

$$\sum_{i,j\in S} \frac{(n_{ij} - n_i(n_j/n))^2}{n_i n_j / n}, \qquad 2 \sum_{i,j\in S} n_{ij} \log \left(\frac{n_{ij}}{n_i n_j / n} \right)。$$

注意到这两个统计量之差，当 $n \to \infty$ 时依概率收敛于零。再次应用与多项分布类似的推导方法，又 $\sum_{j\in S} n_{ij} = \sum_{k\in S} n_{ki} = n_i$，$i \in S$，$\sum_{i\in S} n_i = n$，我们发现统计量

$$\sum_{i,j\in S} \frac{(n_{ij} - n_i(n_j/n))^2}{n_i n_j / n} \tag{69}$$

具有自由度为 $N(N-1)-(N-1)=(N-1)^2$ 的 χ^2 极限分布。对给定的显著性水平 α，查表得 $\chi^2_{(N-1)^2}(\alpha)$的值，当式(69)统计量的值大于或等于 $\chi^2_{(N-1)^2}(\alpha)$时，便否定假设 H，否则便接受 H。

(3)多个样本的同质性检验

设 $X(l)$，$l=1$，…，r 是 r 个具有同一个状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$ 的齐次马氏链，各自的转移概率矩阵相应地为 $P(l)=[p_{ij}(l)]$，$l=1$，…，r。对每个 $l=1$，…，r，设$(x_1(l),\cdots,x_{M_l}(l))$是马氏链 $X(l)$的容量为 M_l 的样本，并假定这 r 个样本是相互独立的。对每个 $l=1,\cdots,r$，样本$(x_1(l),\cdots,x_{M_l}(l))$的转移频数记为 $n_{ij}(l),i,j\in S,n_i(l)=\sum\limits_{j\in S}n_{ij}(l)=\sum\limits_{i\in S}n_{ki}(l)$，$\sum\limits_{i\in S}n_i(l)=M_l$。由前面已论证过的事实知，对任何 $l=1$，…，r，任何 i，$j\in S$，$p_{ij}(l)$的最大似然估计是 $n_{ij}(l)/n_i(l)$。

任意一个齐次马氏链的概率特性，如果不考虑初始分布的影响，那么完全由它的转移概率矩阵所决定。有时为了考查几个齐次马氏链的概率特性是否不同，就需要考查它们的转移概率矩阵有无差异。所谓**同质性检验**就是要凭借所给的 r 个互相独立的样本去检验如下的假设：

$$H:\quad p_{ij}(1)=p_{ij}(2)=\cdots=p_{ij}(r)=p_{ij},\qquad i,j\in S,\tag{70}$$

即 r 个转移概率矩阵 $P(l)$，$l=1$，…，r 全都等于同一个公共的转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$。容易证实 p_{ij}的最大似然估计是

$$\hat{p}_{ij}=\sum_{l=1}^{r}n_{ij}(l)/\sum_{l=1}^{r}n_i(l),\qquad i,j\in S。\tag{71}$$

事实上，利用独立性、马氏性假设条件，似然函数 L 呈如下形式：

$$\begin{aligned}L&=P(X_1(1)=x_1(1),\cdots,X_{M_1}(1)=x_{M_1}(1),\cdots,X_1(r)=x_1(r),\cdots,X_{M_r}(r)=x_{M_r}(r))\\&=P(X_1(1)=x_1(1))p(1)_{x_1(1)x_2(1)}\cdots p(1)_{x^{(1)}_{M_1-1}x^{(1)}_{M_1}}\cdots P(X_1(r)\\&=x_1(r))p_{x_1(r)x_2(r)}(r)\cdots p(r)_{x^{(r)}_{M_r-1}x^{(r)}_{M_r}}\\&=P(X_1(1)=x_1(1))\prod_{i,j\in S}p_{ij}(1)^{n_{ij}(1)}\cdots P(X_1(r)=x_1(r))\prod_{i,j\in S}p_{ij}(r)^{n_{ij}(r)},\end{aligned}$$

$$\log L=\sum_{l=1}^{r}\log P(X_1(l)=x_1(l))+\sum_{i,j\in S}n_{ij}(1)\log p_{ij}(1)+\cdots+\sum_{i,j\in S}n_{ij}(r)\log p_{ij}(r),$$

在假设 H 为真的前提下，由上式可得

$$\begin{aligned}\log L&=\sum_{l=1}^{r}\log P(X_1(l)=x_1(l))+\sum_{i,j\in S}\Big(\sum_{l=1}^{r}n_{ij}(l)\Big)\log p_{ij}\\&=\sum_{l=1}^{r}\log P(X_1(l)=x_1(l))+\sum_{i=1}^{N}\Big\{\sum_{j=1}^{N-1}\Big(\sum_{l=1}^{r}n_{ij}(l)\Big)\log p_{ij}\\&\quad+\Big(\sum_{l=1}^{r}n_{iN}(l)\Big)\log\Big(1-\sum_{j=1}^{N-1}p_{ij}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

由此可见，对任何 i，j：$1\leqslant i\leqslant N$，$1\leqslant j\leqslant N-1$，

$$0=\frac{\partial\log L}{\partial p_{ij}}=\Big(\sum_{l=1}^{r}n_{ij}(l)\Big)\frac{1}{p_{ij}}+\Big(\sum_{l=1}^{r}n_{iN}(l)\Big)\frac{-1}{1-\sum\limits_{j=1}^{N-1}p_{ij}},$$

即
$$p_{iN}=\sum_{l=1}^{r}n_{iN}(l)p_{ij}\Big/\sum_{l=1}^{r}n_{ij}(l),\qquad i,\ j\in S,\ j\neq N。\tag{72}$$

从而
$$p_{iN}\sum_{l=1}^{r}(n_i(l)-n_{iN}(l))=\sum_{j=1}^{N-1}\Big(p_{iN}\sum_{l=1}^{r}n_{ij}(l)\Big)$$
$$=\sum_{j=1}^{N-1}\Big(\sum_{l=1}^{r}n_{iN}(l)p_{ij}\Big)=\sum_{l=1}^{r}n_{iN}(l)(1-p_{iN}),\qquad i\in S,$$

故
$$p_{iN}=\sum_{l=1}^{r}n_{iN}(l)\Big/\sum_{l=1}^{r}n_i(l),\qquad i\in S。\tag{73}$$

由式(72)与式(73)便得最大似然估计式(71)。

记 $M=\sum_{l=1}^{r}M_l$，假设 $M\to\infty$ 时，$\frac{M_l}{M}\to\lambda_l>0$，$l=1,\cdots,r$，$\sum_{l=1}^{r}\lambda_l=1$。那么，检验假设 H 的 χ^2 统计量是

$$\sum_{l=1}^{r}\sum_{i,j\in S}\frac{(n_{ij}(l)-n_i(l)\hat{p}_{ij})^2}{n_i(l)\hat{p}_{ij}},\tag{74}$$

而且，它具有自由度为 $rN(N-1)-N(N-1)=(r-1)N(N-1)$ 的 χ^2 极限分布。于是可用来作 χ^2 检验。

（4）相依重数的检验

如果 $X=\{X_n,\ n=0,\ 1,\ \cdots\}$ 是状态空间为 $S=\{1,\ \cdots,\ N\}$ 的 k 重齐次马氏链，由 I．定理 5 知 $Z=\{Z_n=(X_n,\ \cdots,\ X_{n+k-1}),\ n=0,\ 1,\ \cdots\}$ 是(一重)马氏链。Z 的状态空间 S^k 共含有 N^k 个状态。若记 $P(X_{n+k}=j_k|X_n=i_1,\ \cdots,\ X_{n+k-1}=i_k)$ 为 $p_{i_1\cdots i_kj_k}$，当 Z 是齐次的，则它的转移概率为

$$p_{(i_1\cdots i_k)(j_1\cdots j_k)}=\begin{cases}p_{i_1\cdots i_kj_k}, & \text{当 } i_{l+1}=j_l,1\leqslant l\leqslant k-1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_k\in S。\tag{75}$$

现在假定马氏链 X 的所有(一步)转移概率都是正的。还假定式(75)右方中的概率 $p_{i_1\cdots i_kj_k}$，$i_1,\ \cdots,\ i_k,\ j_k\in S$ 全都是正的。注意到 Z 的转移概率矩阵共有 N^k 行，相应于任一状态 $(i_1,\ \cdots,\ i_k)(i_1,\ \cdots,\ i_k\in S)$ 的那一行中，有且仅有 $p_{i_1\cdots i_kj_k}$，$j_k=1,\ \cdots,\ N$ 这 N 个元素是正的，所以，Z 的移转概率矩阵中正元素的总数为 N^{k+1}。

以 $n_{i_1\cdots i_k}$ 记在一个 n 次观测的样本中游程 $(i_1,\ \cdots,\ i_k)$ 出现的频数，以 $n_{i_1\cdots i_ki_{k+1}}$ 记在此样本中从 $(i_1,\ \cdots,\ i_k)$ 转移到 $(i_2,\ \cdots,\ i_{k+1})$ 的频数。这样 $n_{i_1\cdots i_k}$ 和 $n_{i_1\cdots i_ki_{k+1}}$ 起着与(一重)马氏链中的 n_i 和 n_{ij} 同样的作用。为了判别 X 是不是 k 重的，需要检验的假设是 H：与假设 X 是 k 重马氏链相对立地 X 是 l 重马氏链 $(l<k)$。确切地阐明如下。

$$H:\quad p_{i_1\cdots i_ki_{k+1}}=p_{i_{k-l+1}\cdots i_ki_{k+1}},\quad i_1,\cdots,i_k,i_{k+1}\in S,\tag{76}$$

即转移概率矩阵由 N^{l+1} 个参数 $\{p_{i_{k-l+1}\cdots i_ki_{k+1}},\ i_{k-l+1},\ \cdots,\ i_k,\ i_{k+1}\in S\}$ 所确定。但是，$\{p_{i_{k-l+1}\cdots i_ki_{k+1}},i_{k-l+1},\cdots i_k,i_{k+1}\in S\}$ 所相应的 N^l 行中，每行元素之和为 1，即受到约束 $\sum_{i_{k+1}=1}^{N}p_{i_{k-l+1}\cdots i_ki_{k+1}}=1$，$i_{k-l+1},\ \cdots,\ i_k\in S$ 的限制，所以在 $\{p_{i_{k-l+1}\cdots i_ki_{k+1}},\ i_{k-l+1},\ \cdots,\ i_k,\ i_{k+1}\in S\}$ 中实际上只有 $N^{l+1}-N^l=N^l(N-1)$ 个独立的参数。

在假设 H 为真的前提下，参数的最大似然估计量由下式给出：

$$\hat{p}_{i_1\cdots i_ki_{k+1}}=\frac{n_{i_{k-l+1}\cdots i_ki_{k+1}}}{n_{i_{k-l+1}\cdots i_k}},\qquad i_1,\cdots,i_k,i_{k+1}\in S。\tag{77}$$

那么，适用于检验假设 H 的 χ^2 统计量是

$$\sum_{i_1,\cdots,i_{k+1}\in S} \frac{(n_{i_1\cdots i_k i_{k+1}} - n_{i_1\cdots i_k}\hat{p}_{i_1\cdots i_k i_{k+1}})^2}{n_{i_1\cdots i_k}\hat{p}_{i_1\cdots i_k i_{k+1}}}, \tag{78}$$

并且它具有渐近的自由度为 $N^k(N-1)-N^l(N-1)=N^l(N-1)(N^{k-l}-1)$的 χ^2 分布。

（5）参数假设的检验

假定需要检验的假设是 H：转移概率 p_{ij}具有特定的形式 $p_{ij}(\theta)$，即 $p_{ij}=p_{ij}(\theta)$，i，$j\in S$，这里 $\theta=(\theta_1，\cdots，\theta_k)$是取值于 R^k 的未知参数。

对于这种情形，适用于检验 H 的统计量是

$$\sum_{i,j\in S} \frac{(n_{ij} - n_i p_{ij}(\hat{\theta}))^2}{n_i p_{ij}(\hat{\theta})} \tag{79}$$

这里 $\hat{\theta}$ 是通过解方程组

$$\sum_{i,j\in S} \frac{n_{ij}}{p_{ij}(\theta)} \frac{\partial\, p_{ij}(\theta)}{\partial\theta_u} = 0, \qquad u = 1,\cdots,k, \tag{80}$$

而得到的 θ 的最大似然估计。假定 $N^2\times k$ 矩阵 $D=\left[\frac{\partial\, p_{ij}}{\partial\, \theta_u}\right]$的秩为 k，所以没有多余的参数，并且还假定 $p_{ij}(\theta)$具有关于 θ_u，$u=1$，$\cdots$，k 的连续一阶和二阶偏导数。能够看出[28]式(79)所考虑的统计量的渐近分布是具有自由度 $N(N-1)-k$ 的 χ^2 分布。在这里为简单起见假定了所有的转移概率是正的。如果转移概率矩阵中仅有 d 个元素是正的，那么自由度将是 $d-N-k$。

2. 基于序列相关之上的独立性检验

假定所讨论的马氏链 X 是有限齐次平稳的，其转移概率矩阵中的所有元素都是正的。能够指出对于相当广泛的一类转移矩阵，自相关表征了观测序列的逐个序对之间的统计相依性。

称转移矩阵 $P=[p_{ij}]$ 是**正向序列相依的**，如果

$$\sum_{k=1}^{i} \sum_{r=1}^{j} \pi_k p_{kr} \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{i}\pi_k\Big)\Big(\sum_{r=1}^{j}\pi_r\Big), \quad i,j \in S \tag{81}$$

成立。以 $\mathscr{F}$ 记这样的转移矩阵族。如果式(81)的反向不等式成立，则称此 P 是**负向序列相依的**，以$\mathscr{G}$记这种相应的转移矩阵族。

能够证明[27]：$P\in\mathscr{F}$ 蕴含 $\rho\geqslant 0$，当且仅当 $\{X_n，n=0，1，\cdots\}$ 是独立的，等式 $\rho=0$ 成立。类似地，$P\in\mathscr{G}$蕴含 $\rho\leqslant 0$，等式 $\rho=0$ 成立的充要条件是 $\{X_n，n=0，1，\cdots\}$ 独立。这样，每当 $P\in\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$，$\rho=0$ 时，便意味着 $\{X_n，n=0，1，\cdots\}$ 的序列独立性。

容易证实，当状态空间仅含有两个状态时，转移矩阵 P 总属于 $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$，所以在这种情形里不相关性总蕴含了独立性。当状态的个数较大时，应用定义来验证 P 是否属于 $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$，那是相当冗长而乏味的。正向相依性的较简单的充分条件可得如下：

(i) 如果转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$ 使得对所有的 $j\in S$，$\sum_{r=1}^{j} p_{-kr}$依 k 是不增的，那么 $P\in\mathscr{F}$。

为使(i)成立的一个更简单的充分条件是：

(ii) 如果对每个 $i'>i$，i'，$i\in S$，$p_{i'j}/p_{ij}$依 j 是单调不减的。那么对所有的 $j\in S$，$\sum_{r=1}^{j} p_{kr}$

依 k 是不增的。

条件(ii)常常是确定 P 是否从属于 $\mathscr{F}$ 的最简单的方法。关于$\mathscr{G}$也拥有类似的充分条件。

假定 $P\in\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$，需要检验的假设是 H：$\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是独立的。由前面已陈述的结论知：检验假设 H 等价于检验假设 H^*：$\rho=0$。而用来检验假设 H^* 的一个简单的统计量可取为

$$W_n = \sqrt{n}R, \tag{82}$$

这里 R 是在§1 中研究过的序列相关。在假设 H^* 为真的前提下，当 $n\to\infty$ 时 W_n 具有极限标准正态分布，于是，对给定的显著性水平 α，查(标准)正态分布表，求出 $\Phi_{\alpha/2}(\geqslant 0)$，使得

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\Phi_{\alpha/2}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \alpha。$$

当由样本算得的 W_n 使 $|W_n|\geqslant\Phi_{\alpha/2}$ 成立时，便拒绝假设 H，否则便接受 H。注意到这种检验方法比起前一段中介绍的 χ^2 检验要简便得多。

§3 更深入的论题

1. 吸收链的推断

设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是有限齐次马氏链，状态空间 $S=\{0, 1, \cdots, N\}$，状态 0 是吸收状态，其它状态 $1, \cdots, N$ 都是非常返的，那么 X 的转移概率矩阵 P 可以写成如下分块矩阵的形式。

$$P=\begin{bmatrix}1 & O'\\ U & Q\end{bmatrix},\quad U=[p_{10},\cdots,p_{N0}]'\neq O \tag{83}$$

其中 O 是 $N\times 1$ 零向量，Q 是以 p_{ij}，$i, j=1, \cdots, N$ 为它的第 i 行第 j 列元素的 $N\times N$ 矩阵。因为 $\sum_{j=1}^{N}p_{ij}=1-p_{i0}$，$i=1, \cdots, N$，$U$ 是非零向量，所以 Q 不是随机矩阵。假定状态集 $\{1, \cdots, N\}$ 不含有任何非空真闭子集，每个状态 $1, \cdots, N$ 都是非周期的。令$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$是对马氏链 X 作接连观测所得到的一个 X 的实现。又假定转移概率 p_{ij}，$i, j\in S$ 依赖于 k 个未知参数构成的向量 $\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_k)$。现在，要在吸收尚未发生，即在 $x_n\neq 0$ 的前提下，应用样本$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$来估计 θ。记 $q_i^{(0)}=P(X_0=i)$，$i\in S$，$q=(q_1^{(0)}, \cdots, q_N^{(0)})'$，即初始处在非常返状态上的概率。又记 $e=(1, \cdots, 1)'$ 即元素皆为 1 的 $N\times 1$ 向量。在吸收发生之前，获得 n 次观测的概率显然是 $q'Q^ne$，因此条件似然函数由下式给出：

$$L=\prod_{i,j=1}^{N}p_{ij}^{n_{ij}}/q'Q^ne, \tag{84}$$

这里的 n_{ij} 是在样本中由状态 i 到 j 的转移频数。

令 $\rho_1, \cdots, \rho_N$ 是按其数值大小的递减次序排列的 Q 的特征值。令 $W'=(w_1, \cdots, w_N)$ 和 $V'=(v_1, \cdots, v_N)$分别依次表示对应于 Q 的最大特征值 ρ_1 的，并使 $V'e=1$ 与 $V'W=1$ 规范化了的右和左特征向量。这样 W 和 V 的所有元素都是正的，已经证明[27]：

$$P(X_m=j\,|\,X_{m+n}\neq 0)\xrightarrow[m,n\to\infty]{} w_jv_j,\qquad j=1,\cdots,N \tag{85}$$

并独立于 q。因而，若记 $\pi_j=w_jv_j$，$j=1,\cdots,N$，那么 $\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_N)'$ 便是在以后的长时间内吸收都未发生的条件下 X_n 的极限条件分布。

以 M 记相应于向量 W 的对角矩阵，即 $M=[\delta_{ij}w_j]$。令

$$R=\frac{1}{\rho_1}M^{-1}QM,\quad R=[R_{ij}],\quad R_{ij}=\frac{1}{\rho_1}\frac{p_{ij}w_j}{w_i},\qquad i,j=1,\cdots,N。\tag{86}$$

因为 W 是对应于 Q 的特征值 ρ_1 的右特征向量，所以对任何 $i=1,\cdots,N$ 有

$$\sum_{j=1}^{N}R_{ij}=\frac{1}{\rho_1 w_i}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}w_j=1,\tag{87}$$

故 R 是随机矩阵。又因假定 $\{1,\cdots,N\}$ 不含有非空真闭子集，其中每个状态都是非周期的，那么以 R 为转移概率矩阵的齐次马氏链是不可分的遍历的。此外，$\pi'=(\pi_1,\cdots,\pi_N)=(w_1v_1,\cdots,w_Nv_N)=V'M$ 是相应于 R 的平稳分布，这是因为 V' 是对应于 Q 的特征值 ρ_1 的左特征向量以及式(86)，所以有

$$\pi'R=V'M\frac{1}{\rho_1}M^{-1}QM=\frac{1}{\rho_1}V'QM=V'M=\pi'。\tag{88}$$

当 m 和 $n\to\infty$ 时，马氏链 X 的性能好像就是以 R 为转移概率矩阵、以 π 为平稳分布的马氏链的性能一样。因此，在前面所得到的关于遍历马氏链的结果能够应用到现在的情况中。

似然方程组是

$$\frac{\partial\log L}{\partial\theta_r}=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{n_{ij}}{p_{ij}}\frac{\partial p_{ij}}{\partial\theta_r}-\frac{1}{q'Q^ne}\frac{\partial(q'Q^ne)}{\partial\theta_r}=0,\qquad r=1,\cdots,k。\tag{89}$$

对 Q 的规范型进行微分，发现

$$\frac{\partial(q'Q^ne)}{\partial\theta_r}=n\rho_1^{n-1}(q'M)\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta_r}+\rho_1^nq'\frac{\partial M}{\partial\theta_r}+o(n^{r+1}|\rho_2|^n),\quad r=1,\cdots,k。\tag{90}$$

在 $\frac{1}{n}\frac{\partial\log L}{\partial\theta_r}$ 的表示式中略去 $o(1/n)$ 与 $o(n^r|\rho_2|^n/\rho_1)$ 的项，便得修正的似然方程组：

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{n_{ij}}{p_{ij}}\frac{\partial p_{ij}}{\partial\theta_r}-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta_r}=0,\qquad r=1,\cdots,k。\tag{91}$$

能够看出：如果 L^* 是来自由矩阵 R 所决定的遍历马氏链的样本的似然函数，那么，$\frac{1}{n}\frac{\partial\log L^*}{\theta_r}=0$，除去 $o\left(\frac{1}{n}\right)$ 项之外将引出与上面相同的方程组。所以，可应用这个修正的似然方程组去获得 θ 的估计量及其大样本性质，这就好像是在以 R 为转移概率矩阵、以 π 为平稳分布的情形下所进行的分析一样。

2. 分组链

设 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是遍历的有限齐次马氏链，状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$，转移概率矩阵为 $P=[p_{ij}]$ 初始分布为 $q=(q_1^{(0)},\cdots,q_N^{(0)})$，当状态的个数 N 很大时，为了简化对 X 的研究，在Ⅳ.§3 中已经提出将 S 中的状态进行分组聚集，以便转化为对一个状态个数较少的链的研究方法。设 $G=\{S_1,\cdots,S_m\}$ 是 S 的一个划分，即 $S=\bigcup_{l=1}^{m}S_l$，$S_kS_l=\varnothing$，$k,l=1,\cdots,m$，$k\neq l$。为简便起见记 $\hat{l}$ 为 S_l，$l=1,\cdots,m$。现在定义新的随机变量序列 $Y=\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 如下：当且仅当 $X_n\in S_l$ 时，规定 $Y_n=\hat{l}$，$n=0,1,\cdots$，$l=1,\cdots,m$。特别地，若 $S_1=\{1\}$，$S_2=\{2,\cdots,N\}$，$S=S_1\cup S_2$，那么 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 记录了在每一步状态“1”是否出现。它描述了一种再生现象。一般说来，Y 未必是马氏链。如果 Y

是一个新的马氏链，而且其转移概率独立于原马氏链 X 的初始分布，则称此 X 关于划分 $G=\{S_1,\cdots S_m\}$ **是可分组的**，这时称 Y **是分组马氏链**。从另一个角度来看，如果我们给出定义在 S 上的函数 f 使得对所有的状态 $i\in S_l$ 都有 $f(i)=\hat{l}=S_l$，$l=1,\cdots,m$，那么 $Y_n=f(X_n)$，$n=0,1,\cdots$，即分组链 Y 不过是原马氏链 X 的一个函数。问题是 f 具备了什么条件才能保证 Y 是一分组马氏链，下面的定理作出了回答。

定理 8 对任何状态 $i\in S$ 及任何状态子集 $A\subset S$，记 $p(i,A)=\sum\limits_{j\in A}p_{ij}$，则马氏链 X 关于划分 $G=\{S_1,\cdots,S_m\}$ 是可分组的充分而且必要的条件是：对任何两个超状态 S_k，S_l，$1\leqslant k$，$l\leqslant m$，以及所有状态 $i\in S_k$，概率 $p(i,S_l)$ 都等于同样的值，写作 $\hat{p}(\hat{k},\hat{l})$。这时，矩阵 $\hat{P}=[\hat{p}(\hat{k},\hat{l})]$ 是分组马氏链 Y 的转移概率矩阵。

证 如果马氏链 X 关于划分 $G=\{S_1,\cdots,S_m\}$ 是可分组的，那么依定义转移概率 $P(Y_1=\hat{l}|Y_0=\hat{k})$，$l,k=1,\cdots,m$ 不依赖于 X 的初始分布 q，当然这里要求 $P(Y_0=\hat{k})>0$。特别地，若取集中在状态 $i\in S_k$ 的初始分布，即 $q_i^{(0)}=P(X_0=i)=1(i\in S_k)$，$q_j^{(0)}=0$，$j\in S-\{i\}$，这时

$$P(Y_1=\hat{l}|Y_0=\hat{k})=P(Y_1=\hat{l}|X_0=i)=\sum_{j\in S_l}P(X_1=j|X_0=i)$$
$$=p(i,S_l),\qquad i\in S_k,\qquad k,l=1,\cdots,m$$

对所有的 $i\in S_k$ 都等于同样的值，必要性得证。

证充分性。实际上应用概率的有限可加性、X 的马氏性及假设条件，对任何非负整数 n 及任何 i_0，i_1，$\cdots i_{n-1}$，k，$l=1,\cdots,m$ 有

$$P(Y_{n+1}=\hat{l}|Y_0=\hat{i}_0,\cdots,Y_{n-1}=\hat{i}_{n-1},Y_n=\hat{k})$$
$$=\frac{\sum\limits_{i\in S_k}P(Y_{n+1}=\hat{l},X_n=i,Y_{n-1}=\hat{i}_{n-1},\cdots,Y_0=\hat{i}_0)}{P(Y_n=\hat{k},Y_{n-1}=\hat{i}_{n-1},\cdots,Y_0=\hat{i}_0)}$$
$$=\frac{\hat{p}(\hat{k},\hat{l})\sum\limits_{i\in S_k}P(X_n=i,Y_{n-1}=\hat{i}_{n-1},\cdots,Y_0=\hat{i}_0)}{P(Y_n=\hat{k},Y_{n-1}=\hat{i}_{n-1},\cdots,Y_0=\hat{i}_0)}=\hat{p}(\hat{k},\hat{l})。\tag{92}$$

类似可证：$P(Y_{n+1}=\hat{l}|Y_n=\hat{k})=\hat{p}(\hat{k},\hat{l})$，$n=0,1,\cdots$，$k$，$l=1,\cdots,m$，结合式 (92)便知 Y 具有马氏性，证完。

特别地，如果 $p(i,S_l)=\begin{cases}1, & 当\ i\in S_l,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ $i\in S$，$l=1,\cdots,m$，依定理 8 Y 是分组马氏链。

应用 X 的马氏性、齐次性可得由下述定理所表达的 Y 与 X 之间的关联性质：

定理 9 对前面所给的 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$、$\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$，

(i) 对任何非负整数 n 及任何 $i_0,\cdots,i_{n-1},i\in S$，$l=1,\cdots,m$，有

$$P(Y_{n+1}=\hat{l}|X_0=i_0,\cdots,\quad X_{n-1}=i_{n-1},\quad X_n=i)=P(Y_{n+1}=\hat{l}|X_n=i)=p(i,S_l)。\tag{93}$$

$$0\leqslant p(i,S_l)\leqslant 1,\quad \sum_{l=1}^{m}p(i,S_l)=1\quad i\in S,\quad l=1,\cdots,m。\tag{94}$$

(ii) $\{(X_n,Y_n),n=0,1,\cdots\}$ 此二维随机向量序列具有马氏性，其转移概率为

$$P(X_{n+1}=j,Y_{n+1}=\hat{l}|X_n=i)=\begin{cases}p_{ij}, & 当\ j\in S_l,\\ 0, & 当\ j\notin S_l,\end{cases}\quad i,j\in S,\quad l=1,\cdots,m,n=0,1,\cdots。\tag{95}$$

(iii) 如果$\{X_n, n=0,1,\cdots\}$是平稳的，$\{\pi_j, j\in S\}$是它的平稳分布，则$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$也是平稳的，而且其绝对概率为

$$P(Y_n=\hat{l})=\pi_l^*=\sum_{j\in S_l}\pi_j,\quad l=1,\cdots,m,\quad n=0,1,\cdots。\tag{96}$$

证 由概率测度的有限可加性及X的马氏性、齐次性，对任何$n=0,1,\cdots,i_0,\cdots,i_{n-1}$，$i\in S$，$l=1,\cdots,m$，

$$\begin{aligned}&P(Y_{n+1}=\hat{l}\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)\\&=\sum_{j\in S_l}P(X_{n+1}=j\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i),\\&=\sum_{j\in S_l}P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=P(Y_{n+1}=\hat{l}\mid X_n=i)\end{aligned}$$

而
$$\sum_{j\in S_l}P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=\sum_{j\in S_l}p_{ij}=p(i,S_l),$$

式(93)得证。式(94)是显然的。

证(ii)。对任何非负整数n，任何$i_0,\cdots,i_{n-1},i,j\in S$，及任何$l_0,\cdots,l_n$，$l=1,\cdots,m$，由$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$的定义知，若$P(X_0=i_0, Y_0=\hat{l}_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},Y_{n-1}=\hat{l}_{n-1},X_n=i,Y_n=\hat{l}_n)>0$，则$(X_0=i_0, Y=\hat{l}_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},Y_{n-1}=\hat{l}_{n-1},X_n=i,Y_n=\hat{l}_n)=(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)$。再利用$X$的马氏性便有

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=j,Y_{n+1}=\hat{l}\mid X_0=i_0,Y_0=\hat{l}_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},Y_{n-1}=\hat{l}_{n-1},X_n=i,Y_n=\hat{l}_n)\\&=P(X_{n+1}=j,Y_{n+1}=\hat{l}\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)\\&=P(X_{n+1}=j,Y_{n+1}=\hat{l}\mid X_n=i)。\end{aligned}\tag{97}$$

类似地，$P(X_{n+1}=j, Y_{n+1}=\hat{l}\mid X_n=i, Y_n=\hat{l}_n)=P(X_{n+1}=j, Y_{n+1}=\hat{l}\mid X_n=i)$。 (98)

综合式(97)、(98)便知$\{(X_n, Y_n), n=0,1,\cdots\}$具有马氏性。

由$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$的定义知

$$P(X_{n+1}=j,Y_{n+1}=\hat{l}\mid X_n=i)=\begin{cases}P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=p_{ij}, & 当\ j\in S_l,\\ P(\varnothing\mid X_n=i)=0, & 当\ j\notin S_l。\end{cases}$$

再由式(98)即得式(95)。

证(iii)。对任何正整数k，t，任何非负整数$t_1,\cdots,t_k$：$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k$，以及任何$\hat{l}_1,\hat{l}_2,\cdots,\hat{l}_k$，根据$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$的构造，概率测度的可加性及$X$是平稳的假定，便有

$$\begin{aligned}P(Y_{t_1}=\hat{l}_1,Y_{t_2}=\hat{l}_2,\cdots,Y_{t_k}=\hat{l}_k)&=\sum_{r=1}^{k}\sum_{i_r\in S_{l_r}}P(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_k}=i_k)\\&=\sum_{r=1}^{k}\sum_{i_r\in S_{l_r}}P(X_{t_1+t}=i_1,X_{t_2+t}=i_2,\cdots,X_{t_k+t}=i_k)\\&=P(Y_{t_1+t}=\hat{l}_1,Y_{t_2+t}=\hat{l}_2,\cdots,Y_{t_k+t}=\hat{l}_k),\end{aligned}$$

故$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$是平稳的。又因对任何$n=0,1,\cdots$，$l=1,\cdots,m$，

$$\pi_l^*=P(Y_n=\hat{l})=\sum_{j\in S_l}P(X_n=j)=\sum_{j\in S_l}\pi_j。$$

式(96)得证。证毕。

现在假设$f(i)$是定义在$i\in S$上取值于$G=\{S_1,\cdots,S_m\}$的某个一般的函数，$X=\{X_n,$

$n=0, 1, \cdots\}$ 是遍历的有限齐次马氏链，又设 $Y=\{Y_n=f(X_n), n=0, 1, \cdots\}$，并且 Y 与 X 具有如下的关联性质：对任何 $n=0, 1, \cdots$，任何 $i_0, \cdots, i_{n-1}, i\in S$，任何 $l=1, \cdots, m$，

$$P(Y_n=\hat{l}|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i) = P(Y_n=\hat{l}|X_n=i)=q_{il}, \tag{99}$$

$$0\leqslant q_{il}\leqslant 1, \qquad \sum_{l=1}^{m} q_{il}=1。 \tag{100}$$

此 Y 作为 X 的函数或修正一般说来不再是马氏链。然而，只要仔细考察定理 9 中(ii)与(iii)的证明及 Y 的构造，便可类似地证得如下结论：

定理 10 二维随机向量序列 $\{(X_n, Y_n), n=0, 1, \cdots\}$ 具有马氏性，其"转移概率"为

$$P(X_{n+1}=j,Y_{n+1}=\hat{l}|X_n=i)=p_{ij}q_{jl}, \qquad i,j\in S,\ l=1,\cdots,m。 \tag{101}$$

如果 X 是平稳的，则 Y 也是平稳的。

式(101)的根据是因为 Y 的构造，为保证 $P(X_n=i, Y_n=\hat{l}_n)>0$，必须 $(X_n=i)\subset(Y_n=\hat{l}_n)$，再由式(99)便得

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=j,Y_{n+1}=\hat{l}|X_n=i,Y_n=\hat{l}_n) &= P(X_{n+1}=j,Y_{n+1}=\hat{l}|X_n=i)\\ &= P(X_{n+1}=j|X_n=i)P(Y_{n+1}=\hat{l}|X_{n+1}=j)\\ &= p_{ij}q_{jl}。\end{aligned}$$

倘若不能直接地观测到马氏链 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$，那么自然会想到用能被观测到的 X 的修正 $Y=\{Y_n, n=0, 1, \cdots\}$ 来代替。于是，如果 $\mathbf{Y}=(y_0, \cdots, y_n)$是 Y 的一个实现，我们自然希望用它去估计相应于 $\mathbf{Y}$ 的 X 的实现 $\mathbf{X}=(x_0, \cdots, x_n)$。因此，我们的兴趣在于去估计已给 $\mathbf{Y}$ 之下 $\mathbf{X}$ 的后验分布 $P(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$。然而此后验分布有赖于未知的转移概率 p_{ij}，i，$j\in S$。所以，我们的任务是由 $\mathbf{Y}$ 去估计 p_{ij}，i，$j\in S$。一种估计 p_{ij}的可能途径是应用边缘似然函数

$$L(\mathbf{Y})=L(y_0,\cdots,y_n)=\sum_{x_0,\cdots,x_n}L(x_0,\cdots,x_n,y_0,\cdots,y_n)=\sum_{\mathbf{X}}L(\mathbf{X},\mathbf{Y}),$$

由定理 10，式(101)与式(99)得

$$\begin{aligned}L(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &= P(X_0=x_0,X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n,Y_0=y_0,Y_1=y_1,\cdots,Y_n=y_n)\\ &= P(X_0=x_0,Y_0=y_0)P(X_1=x_1,Y_1=y_1|X_0=x_0)\cdots P(X_n\\ &= x_n,Y_n=y_n|X_{n-1}=x_{n-1})=q_{x_0}^{(0)}q_{x_0y_0}\prod_{r=1}^{n}p_{x_{r-1}x_r}q_{x_ry_r}。\end{aligned} \tag{102}$$

然后将这些量的估计代入到 $P(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$的表达式中。因为边缘 Y 通常已失去了马氏性，$L(\mathbf{Y})$ 的表达式很不简单。此外，一般说来在 $L(\mathbf{Y})$中的所有 p_{ij}并非完全都是等同的。所以我们提出一种可供选用的直接估计 $P(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$的方法。

令 $\mathscr{X}_\mathbf{Y}$ 是相应于已给实现 $\mathbf{Y}$ 的所有可能实现 $\mathbf{X}$ 的集合。对任何已知的 $\mathbf{X}$ 可用最大似然方法估计 p_{ij}，得到 $\hat{p}_{ij}(\mathbf{X})=n_{ij}(\mathbf{X})/n_i(\mathbf{X})$，这里 $n_{ij}(\mathbf{X})$是在实现 $\mathbf{X}$ 中由状态 i 至 j 的转移频数，而 $n_i(\mathbf{X})=\sum_{j\in S}n_{ij}(\mathbf{X})$。既然 $P(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$与 $P(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$成比例，此联合分布与 $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$成比例。若以 $\hat{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$记由 $\hat{p}_{ij}(\mathbf{X})$代替 p_{ij}之后的 $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$，那么后验分布 $P(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$的一个相合估计是

$$\hat{P}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \frac{\hat{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})}{\sum_{X\in\mathscr{X}_Y}\hat{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})}, \quad X \in \mathscr{X}_Y, \tag{103}$$

在某种意义上，这是规范化了的估计的似然。

假定原马氏链 X 的转移概率 p_{ij}，i，$j\in S$ 依赖于一未知实参数 θ，Y 是在特殊情形

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{如 } i\in S_l, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad i\in S, \quad l=1,\cdots,m \tag{104}$$

之下关于 X 的分组链。现在试问：如何由 Y 的一个实现$(y_1, \cdots, y_n)$去估计参数 θ。

如果$(x_1, \cdots, x_n)$记作 X 是可以取得的 X 的实现，由 X 的马氏性、齐次性，这样本的似然函数是

$$\begin{aligned} L_1(\theta) &= P(X_1 = x_1,\cdots,X_n = x_n) \\ &= P(X_1 = x_1)\prod_{l=1}^{n-1} p_{x_l x_{l+1}}(\theta)。\end{aligned} \tag{105}$$

而基于 Y 的实现 $\mathbf{Y}=(y_0, \cdots, y_n)$之上的似然函数由下式给出：

$$L_2(\theta) = \sum_{X\in\mathscr{X}_Y} L_1(\theta), \tag{106}$$

这里 $\mathscr{X}_Y$ 是所有那样的实现 $\mathbf{X}=(x_1, \cdots, x_n)$构成的集合，即此集合中的元素 $\mathbf{X}=(x_1, \cdots, x_n)$都对应于观测的实现 $\mathbf{Y}=(y_0, \cdots, y_n)$。一般 $L_2(\theta)$不具有简单的形式，但是，能将$L_2(\theta)$写成

$$\begin{aligned} L_2(\theta) &= P(Y_1 = y_1,\cdots,Y_n = y_n) \\ &= P(Y_1 = y_1)P(Y_2 = y_2|Y_1 = y_1)P(Y_3 = y_3|Y_1 = y_1,Y_2 = y_2)\cdots \\ &\quad \cdots P(Y_n = y_n|Y_1 = y_1,\cdots,Y_{n-1} = y_{n-1})。\end{aligned} \tag{107}$$

能够看出$\frac{d\log L_2(\theta)}{d\theta}$是一零均值鞅。尽管 Y 一般不是马氏链，但在目前的情况下仍能应用鞅极限的结果去推导出由解方程$\frac{d\log L_2(\theta)}{d\theta}=0$ 所得的根作为 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 的渐近正态性和相合性[27]。因此，最大似然估计的问题原则上是被解决了。可是通常 $L_2(\theta)$具有复杂的形式，于是去寻求一种考察更简便，即使效能有所下降的方法也是值得的。这就引出了最小 χ^2 方法。

以 n_l 记在样本$(y_1, \cdots, y_n)$中观测状态 $\hat{l}(\in G=\{S_1, \cdots, S_m\})$出现的频数。为简单起见假定 X 是平稳的马氏链，并有平稳分布 $\{\pi_j, j\in S\}$，则由定理 9 知 Y 也是平稳的(一般不是马氏链)，其绝对概率为

$$P(Y_n = \hat{l}) = \pi_l^* = \sum_{j\in S_l}\pi_j, \quad l = 1,\cdots,m, \ n = 0,1,\cdots。$$

假定 π_j，$j\in S$，从此 π_l^*，$l=1, \cdots, m$ 是一个未知参数 θ 的函数。现在我们可以通过极小化 χ^2 表达式

$$\psi = \sum_{l=1}^{m}\frac{(n_l - n\pi_l^*(\theta))^2}{n\pi_l^*(\theta)}, \tag{108}$$

重要的是要注意到 ψ 的渐近分布不再是 χ^2 分布；但是它能被写成为若干个独立的 χ^2 变量的线性组合。利用对于定义在一个有限马氏链上的函数的中心极限定理[26]，易直接确立量

$$\xi_l = \frac{n_l - n\pi_l^*(\theta)}{\sqrt{n\pi_l^*(\theta)}}, \quad l = 1,\cdots,m \tag{109}$$

的渐近正态性。而且，$\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_m)$具有极限 m 维正态分布，其离差矩阵不是对角矩阵。通过一个对 ξ 的正交变换便能将 ψ 写成每个都具有自由度为 1 的 χ^2 分布的若干渐近独立的变量的一个线性组合。

θ 的最小 χ^2 估计量 $\hat{\theta}$ 可作为求解方程$\frac{d\psi}{d\theta}=0$ 的根而得到。因为 $\sum_{l=1}^{m}\pi_l^*(\theta)=1$，所以 $\sum_{l=1}^{m}\frac{d\pi_l^*(\theta)}{d\theta}=0$，由此经整理方程$\frac{d\psi}{d\theta}=0$ 即为

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{n_l}{\pi_l^*(\theta)}\right)^2\frac{d\pi_l^*(\theta)}{d\theta}=0。\tag{110}$$

下面将给出诱导此最小 χ^2 估计量的渐近性质的轮廓概要。记 $T_l(n)=\frac{n_l}{n}$，$l=1, \cdots, m$，$T(n)=(T_1(n), \cdots T_m(n))$，那么估计方程(110)变成如下形式：

$$\phi(T(n),\theta)=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{nT_l(n)}{\pi_l^*(\theta)}\right)^2\frac{d\pi_l^*(\theta)}{d\theta}=0。\tag{111}$$

记 $\pi^*(\theta)=(\pi_1^*(\theta), \cdots, \pi_m^*(\theta))$，仍因 $\sum_{l=1}^{m}\frac{d\pi_l^*(\theta)}{d\theta}=0$，从而有

$$\phi(\pi^*(\theta),\theta)=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{n\pi_l^*(\theta)}{\pi_l^*(\theta)}\right)^2\frac{d\pi_l^*(\theta)}{d\theta}=n^2\sum_{l=1}^{m}\frac{d\pi_l^*(\theta)}{d\theta}=0。\tag{112}$$

假定对所有的 $l=1, \cdots, m$，$\pi_l^*(\theta)>0$，而且 $\pi_l^*(\theta)$关于 θ 是两次可微的。于是能够验证 ϕ 关于 $T_l(l=1, \cdots, m)$也关于 θ 具有连续的一阶导数。所以，估计方程 $\phi=0$ 在点$(\pi^*(\theta), \theta)$处满足隐函数定理的条件。从而，方程 $\phi(T(n), \theta)=0$ 存在着一个本性唯一根，写作 $\hat{\theta}_n=g(Tn))$，当 $n\to\infty$时对于 θ 它是相合的；事实上 $g(\pi^*(\theta))=\theta$，所以 $\hat{\theta}_n$ 是一个 θ 的费歇耳相合估计量[28]。由隐函数定理还可得出 g 在 $\pi^*(\theta)$的邻域中关于 $T(n)$是连续可微的。

为了证明 $\hat{\theta}_n$ 的渐近正态性，我们利用下面的事实：

$$\sqrt{n}(T(n)-\pi^*(\theta))\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d. f.}}\mathcal{N}_m(O,\Sigma),\tag{113}$$

其中 Σ 的第 u 行第 v 列元素 $\sigma_{uv}(u, v=1, \cdots, m)$由下式给出：

$$\sigma_{uv}=\pi_v^*(\delta_{uv}-\pi_u^*)+\sum_{M=1}^{\infty}\left\{\sum_{i\in S_u}\sum_{j\in S_v}\pi_i(p_{ij}^{(M)}-\pi_j)+\sum_{j\in S_v}\sum_{i\in S_u}\pi_j(p_{ji}^{(M)}-\pi_i)\right\}。\tag{114}$$

既然 $\hat{\theta}_n=g(T(n))$关于 $T(n)$是连续可微的，由众所周知的收敛定理[28]便得出

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{d. f.}}\mathcal{N}(O,G'\textstyle\sum G),\tag{115}$$

这里 $G'=\left(\frac{\partial g}{\partial\pi_1^*}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial\pi_m^*}\right)$。应注意到$\frac{\partial g}{\partial\pi_l^*}$，$l=1, \cdots, m$ 可以使用下面的公式进行计算：

$$\frac{\partial g}{\partial\pi_l^*}=\frac{\partial\phi}{\partial\pi_l^*}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial\theta},\qquad l=1,\cdots,m。\tag{116}$$

3. 熵

假定 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是有限齐次平稳马氏链，其状态空间 S 仍为 $\{1, \cdots, N\}$，平稳分布为 $\{\pi_j, j=1, \cdots, N\}$。作为度量此平稳分布的不确定性程度大小的熵是

$$H_1=-\sum_{j=1}^{N}\pi_j\log\pi_j。\tag{117}$$

X 的相继观测对的二维概率分布是

$$P(X_n = i, X_{n+1} = j) = P(X_n = i)P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \pi_i p_{ij}, \quad i,j \in S, \quad n = 0,1,\cdots, \tag{118}$$

对应于此二维概率分布的熵是

$$H_2 = -\sum_{i,j\in S} \pi_i p_{ij} \log (\pi_i p_{ij})。 \tag{119}$$

那么，在已知前一次观测结果的前提下，度量紧接其后观测的平均条件不确性程度大小的条件熵 H_{21}，由条件熵的性质应为

$$H_{21} = H_2 - H_1 = -\sum_{i,j\in S} \pi_i p_{ij} \log p_{ij}, \tag{120}$$

将 π_i，p_{ij}的最大似然估计 $\hat{\pi}_i = n_i/n$，$\hat{p}_{ij} = n_{ij}/n_i$，$i$，$j \in S$ 代入式(120)中有

$$\hat{H}_{21} = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{N} n_i \log n_i - \sum_{i,j\in S} n_{ij} \log n_{ij} \Big)。 \tag{121}$$

注意到如果 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是相互独立的，即 $p_{ij} = \pi_j$，i、$j \in S$，那么由式(119)、式(117)及 $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$ 便知 $H_2 = 2H_1$；当 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是相依的，则由式(120)和条件熵的性质有 $H_1 < H_2 < 2H_1$。

由式(120)知 $2H_1 - H_2 = H_1 - H_{21}$。明显地，这个量度量了由于应用对前次观测的相依性而不是不利用它所带来的信息增益。代入最大似然估计量，由式(117)、式(121)及式(39)便有

$$\begin{aligned}
T_1 &= 2n(\hat{H}_1 - \hat{H}_{21}) = 2n\Big[-\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{n} \log \frac{n_i}{n} - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{N} n_i \log n_i - \sum_{i,j\in S} \pi_{ij} \log n_{ij} \Big) \Big] \\
&= 2\Big[-\sum_{i=1}^{N} n_i(\log n_i - \log n) - \sum_{j=1}^{N} n_j \log n_j + \sum_{i,j\in S} n_{ij} \log n_{ij} \Big] \\
&= 2\Big[-\sum_{i,j\in S} n_{ij} \log n_i + \sum_{i,j\in S} n_{ij} \log n - \sum_{i,j\in S} n_{ij} \log n_j + \sum_{i,j\in S} n_{ij} \log n_{ij} \Big] \\
&= 2\sum_{i,j\in S} n_{ij}(\log n + \log n_{ij} - \log n_i - \log n_j) \\
&= 2\sum_{i,j\in S} n_{ij} \log \frac{n_{ij}}{n_i n_j / n}。
\end{aligned} \tag{122}$$

此 T_1 与 § 2.1.(2)中作似然比检验使用的统计量相同，因此具有极限的自由度为$(N-1)^2$的 χ^2 分布，为了检验对立于马尔科夫相依性的独立性，选择 T_1 作为检验统计量是合适的。

这个方法可被扩展用来检验如下的假设：对立于 k 重相依性具有 $k-1$ 重相依性。适用的检验统计量是

$$T_k = 2n(\hat{H}_{k,k-1} - \hat{H}_{k+1,k}), \tag{123}$$

这里，$H_{1,0} = H_1$，

$$H_{l,l-1} = -\sum_{a_1,\cdots,a_l} P(X_1 = a_1, \cdots, X_l = a_l) \log P(X_l = a_l | X_1 = a_1, \cdots, X_{l-1} = a_{l-1}),$$

$$\hat{H}_{l,l-1} = -\sum_{a_1,\cdots,a_l} \left\{ \frac{n_{a_1\cdots a_l}}{n} \log \left\{ \frac{n_{a_1\cdots a_l}}{n_{a_1\cdots a_{l-1}}} \right\} \right\} 。$$

$n_{a_1\cdots a_l}$记在样本中 l 元有序组$(a_1, \cdots, a_l)$出现的频数。我们已经使用了转移的循环计数法，这

并不影响渐近的结果。T_k 具有极限的自由度为 $N^{k-1}(N-1)^2$ 的 χ^2 分布。注意到这是和相应的似然比检验同样的检验，而且是渐近地等价于在§2.1. 中给出的 χ^2 检验。

虽然此信息方法所给出的检验统计量与似然比检验中所采用的统计量相同，然而借助于条件熵 $H_{k,k-1}$提供了更进一步的认识。$\hat{H}_{k,k-1}$随着 k 的改变而变化的标图常常给出了关于相依重数的有用而形象的指南。

4. 可列状态空间

假设 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是具有可列状态空间 $S=\{1, 2, \cdots\}$ 的齐次马氏链，转移概率为 p_{ij}，i，$j\in S$。还假定 X 是不可分的，所有状态都是非周期的，正常返的，即遍历的，由Ⅱ. 定理 3 之推论以及Ⅱ. 定理 10 知

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} = \pi_j, \qquad j\in S, \tag{124}$$

$$\pi_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\pi_j = 1, \quad \pi_j = \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i\, p_{ij}, \quad j\in S。\tag{125}$$

这里 μ_{jj}是状态 j 的平均回转时间。

假定 $p_{ij}(i, j\in S)$是一个未知实参数 θ 的已知函数 $p_{ij}(\theta)(i, j\in S)$。问题是如何由 X 的实现$(x_1, \cdots, x_n)$来估计参数 θ，以及如何获得关于参数 θ 的假设检验的种种方法。似然函数由下式给出：

$$L_n(\theta) = \sum_{i,j\in S} p_{ij}^{n_{ij}}(\theta), \tag{126}$$

其中 n_{ij}是在样本$(x_1, \cdots, x_n)$中由状态 i 到状态 j 转移的频数。如果 $n_{ij}=0$，则规定$p_{ij}^{n_{ij}}(\theta)=1$。所以在式(126)中，实际上只对样本$(x_1, \cdots, x_n)$中出现有自 i 到 j 转移的因子进行乘积。我们已假定初始状态 X_0 是固定的。于是参数 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_n$ 作为下列方程的根而得到，

$$\sum_{i,j}\left(\frac{n_{ij}}{p_{ij}(\theta)}\right)\left(\frac{dp_{ij}(\theta)}{d\theta}\right) = 0, \tag{127}$$

式(127)中，当然只对样本$(x_1, \cdots, x_n)$中出现有自 i 到 j 转移的并使 $p_{ij}(\theta)>0$ 的项全体进行求和。

在施加于转移概率 $\{p_{ij}(\theta), i, j\in S\}$ 之上的经典正则条件之下[28]便能确立 $\hat{\theta}_n$ 的相合性和渐近正态性。此证明是仿效如在文献［28］中给出的对于独立情形的经典方法，只是用对于马氏链的大数定律及中心极限定理来替代对应于独立观测的同样的极限结果。文献［30］与［9］已分别证明了所需要的大数定律和中心极限定理。最后我们发现

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta, \tag{128}$$

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{d.f.}} \mathcal{N}(o, \sigma^2(\theta)), \tag{129}$$

这里
$$\begin{aligned}\sigma^2(\theta) &= \left\{E\left(-\frac{d^2\log p_\theta(X_2|X_1)}{d\theta^2}\right)\right\}^{-1}\\ &= \left\{\sum_{i,j=1}^{\infty}P(X_1=i,\ X_2=j)\left(-\frac{d^2\log p_{ij}(\theta)}{d\theta^2}\right)\right\}^{-1}\\ &= \left\{\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_i(\theta)p_{ij}(\theta)\left[\frac{1}{p_{ij}^2(\theta)}\left(\frac{dp_{ij}(\theta)}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{p_{ij}(\theta)}\left(\frac{d^2p_{ij}(\theta)}{d\theta^2}\right)\right]\right\}^{-1}\end{aligned}$$

$$=\left\{\sum_{i,j=1}^{\infty}\left(\frac{\pi_i(\theta)}{p_{ij}(\theta)}\right)\left(\frac{dp_{ij}(\theta)}{d\theta}\right)^2\right\}^{-1}, \tag{130}$$

上式中最后一个等号成立是因为 $\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}(\theta)=1$，$i\in S$，所以

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_i(\theta)\frac{d^2p_{ij}(\theta)}{d\theta^2}=0。$$

需要指明的是在式(130)中仅仅对相应于正的 $p_{ij}(\theta)$项进行求和。像在有限状态空间中的情形一样，这些结果能被扩展到多个参数的情形。

结果式(128)和式(129)可用来以通常的方式推出假设 H：$\theta\in\Lambda$，$\Lambda\subset\Theta$ 的似然比检验统计量的渐近分布，这里 Θ 是参数空间。关于具有一般状态空间马氏链推断的渐近理论的综合处理方法，参看文献 [30]。

还应指出在本节 2 中所叙述的关于分组链估计的最小 χ^2 方法可以推广到可列状态空间的情形，只要当此可列状态空间被划分成有限多个组或超状态。

本章只对离散参数马氏链并侧重在状态个数有限的情形进行讨论。自然对于连续参数的马氏链也应探讨相应的估计和假设检验问题。对此可参看文献 [27]、[30]。

除了 § 3 所介绍的论题外，还有一些已被探讨的有意义的论题。如贝叶斯(Bayes)分析[27]。假定已有某些关于转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$ 的先验知识，于是可利用这些知识规定出 P 的先验分布，进而根据观测所得的样本确定出 P 的后验分布，然后在指定的损失下(或未指定损失函数)给出 p_{ij}的贝叶斯估计。又如应用自助法来研究马氏链转移概率的估计和某一状态的到达时间[33]。

第七章　马尔科夫链在计算机上的分析

电子计算机的问世是当今世界科学技术革命的先导和标志，电子计算机的飞速发展与普遍应用已广泛地渗透和影响到了各个领域，作为重要数学分支的马尔科夫过程论也不例外。从前面的几章已经看出：像判定齐次马氏链是否为遍历的；确定齐次遍历马氏链的平稳分布；寻求齐次遍历马氏链的常返状态及非常返状态集；寻求从非常返状态出发的平均吸收时间和吸收概率；确定齐次非遍历马氏链的状态闭集及其周期等等都是分析掌握马氏链的基本概率特性的重要问题。本章的主要目的就是针对这些问题，提出可行的求解方法，构思一系列遵循一定顺序的基本运算或简单指令，以便让计算机依次执行完成，即构造能在计算机上使用的有效算法，以求问题的计算机解答。在本章中着重对离散参数的有限齐次马氏链进行讨论。

§1　遍历性的判定——列和法

首要的问题是判别状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$ 的离散参数齐次马氏链 $X=\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ 是否具有遍历性，或者说判定此马氏链 X 的 $N\times N$ 转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$ 是否为遍历的。对此，有多种可行的判定方法：

i. 参看第四章例 1。对每个状态 $i\in S$，计算出 $C(i)=\{j$：有正整数 n 使 $p_{ij}^{(n)}>0\}$，通过比较 $C(i)$，$i\in S$，能确定出不可分闭子集，如果恰有一个不可分闭子集，还能求得此不可分闭子集的周期。在计算机上能够有效地进行上述的分析。文献[34]早就给出了寻求常返状态闭子集的一个有效方法。

ii. 根据第四章§2中的讨论，特别是Ⅳ. 定理 18 的结论，可先在计算机上算出转移概率矩阵 P 的特征值与相应的特征向量。如果除 1 之外，P 的其它特征值的模都严格地小于 1，那么 P 的特征值 1 所相应的左特征向量就是马氏链 X 的平稳分布。如果还有其它模为 1 的 P 的特征值，这就表明不是 S 中有周期的状态就是 S 是可分的。如果我们关注的仅仅是存在的平稳分布，那么这种方法是有用的。但是它不能对 X 的状态进行分类，因而不能用此方法求得平均吸收时间和吸收概率。

iii. 回忆在第四章中关于遍历性的讨论，以及在第五章中所给出的遍历系数概念与其有关的结论。应用它们可以对遍历性问题作出判断，因为离散系数的有限齐次马氏链为遍历的充要条件是对某正整数 m 遍历系数 $\alpha(P^m)>0$，所以为了判定遍历性的一般步骤是对 P 的高次幂计算遍历系数，注视着前面论断中的条件是否发生，显然这时的关键问题变为 P 的幂次究竟应当多高。明显地这算法本身并不能让计算机去取 P 的越来越高的幂次直到 $\alpha(P^m)>0$为止，因为对于非遍历转移概率矩阵这样的步骤将永无止境。因此为了能够使用计

算机去判定是否有某个正整数 m 使得 $\alpha(P^m)>0$，我们必须能够回答下列问题：如果 P 是 $N\times N$ 随机矩阵，是否存在一正整数 $m_0=m_0(N)$ 使得对某个 m 有 $\alpha(P^m)>0$ 的充要条件为 $\alpha(P^{m_0})>0$？表述此问题的另一种提法是：对某个 m，$\alpha(P^m)>0$ 的这种性质是不是可以判定的？回答是肯定的，为了证实这一点，需要先引入一些有用的概念和结果。

对任给的状态 $i,j,k\in S$，称 i 与 j 具有 **m 阶公共后继状态** k，如果 $p_{ik}^{(m)}>0$，同时 $p_{jk}^{(m)}>0$。

引理 1　设 P 是一个 $N\times N$ 随机矩阵，则 $\alpha(P^m)>0$ 的充要条件是每对状态 $i,j\in S$ 都有 m 阶公共后继状态。

证　由 m 阶公共后继状态的定义，以及 V. 式(5)

$$\alpha(P^m)=\min_{1\leqslant i,j\leqslant N}\sum_{k=1}^{N}\min(p_{ik}^{(m)},p_{jk}^{(m)}),\tag{1}$$

即得结论。

引理 2　设 P 是一个 $N\times N$ 随机矩阵，对任给的状态 $i,j\in S$，如果 i 与 j 具有某阶公共后继状态，则它们必有阶为 $N(N-1)/2$ 的公共后继状态。

证　如果状态 i 与 j 有阶为 m 的公共后继状态 k，即 $p_{ik}^{(m)}>0$，$p_{jk}^{(m)}>0$，因为 $\sum_{r=1}^{N}p_{kr}=1$，所以必有状态 $r(\in S)$ 使得 $p_{kr}>0$。于是由 C-K 方程知

$$p_{ir}^{(m+1)}\geqslant p_{ik}^{(m)}p_{kr}>0,\qquad p_{jr}^{(m+1)}\geqslant p_{jk}^{(m)}p_{kr}>0,$$

故 i 与 j 有 $m+1$ 阶公共后继状态 r，依此类推便知：对任何 $l=1,2,\cdots$，i 与 j 都有 $m+l$ 阶公共后继状态。因此为证本引理，只要证明 i 与 j 具有小于或等于 $N(N-1)/2$ 阶的公共后继状态就足够了。

现在假定状态 i，j 具有 M 阶公共后继状态 k，而且它们不再有阶数比 M 小的公共后继状态，即存在状态 $i_1,\cdots,i_{M-1},j_1,\cdots,j_{M-1}(\in S)$ 及相应的路径：$i=i_0\to i_1\to\cdots\to i_{M-1}\to i_M=k$，$j=j_0\to j_1\to\cdots\to j_{M-1}\to j_M=k$，使得

$$p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{M-1}k}>0,\qquad p_{jj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{M-1}k}>0。\tag{2}$$

为了记法上的方便，用序对 (i_m,j_m) 表示上述两条转移路径在 m 时 $(m<M)$ 所处的状态。首先注意到对于 $m=1,\cdots,M-1$，没有一对 (i_m,j_m) 能使 $i_m=j_m$，否则若有 $i_m=j_m$，那么由式(2)及 C-K 方程有

$$p_{ii_m}^{(m)}\geqslant p_{ii_1}\cdots p_{i_{m-1}i_m}>0,\qquad p_{ji_m}^{(m)}\geqslant p_{jj_1}\cdots p_{j_{m-1}j_m}>0,$$

即 i_m 是 i 与 j 的 $m(<M)$ 阶公共后继状态，这与前面对 M 的假定相矛盾。

其次注意到没有两对能够是相同的，即对任何 m_1,m_2：$1\leqslant m_1<m_2<M$，$i_{m_1}=i_{m_2}$ 且 $j_{m_1}=j_{m_2}$ 是不可能的。倘若不然，便有两条长度为 $M-(m_2-m_1)(<M)$ 的路径：

$$i\to i_1\to\cdots\to i_{m_1}=i_{m_2}\to i_{m_2+1}\to\cdots\to i_{M-1}\to k,$$

$$j\to j_1\to\cdots\to j_{m_1}=j_{m_2}\to j_{m_2+1}\to\cdots\to j_{M-1}\to k。$$

这时由式(2)，$p_{i_{m_1}i_{m_2+1}}>0$，$p_{j_{m_1}j_{m_2+1}}>0$，以及 C-K 方程，可得

$$p_{ik}^{(M-(m_2-m_1))}\geqslant p_{ii_1}\cdots p_{i_{m_1}i_{m_2+1}}\cdots p_{i_{M-1}k}>0,$$

$$p_{jk}^{(M-(m_2-m_1))}\geqslant p_{jj_1}\cdots p_{j_{m_1}j_{m_2+1}}\cdots p_{j_{M-1}k}>0,\tag{3}$$

这仍与 M 的假定矛盾。

最后还可指出：如果有两个状态对具有同样的状态元素，但是处于相反顺序的位置上，即有 $1\leqslant m_1<m_2<M$，使得 $i_{m_1}=j_{m_2}$ 且 $j_{m_1}=i_{m_2}$，那么也将导致类似的矛盾。因为这时也有两条长度为 $M-(m_2-m_1)(<M)$ 的路径：

$$i\to i_1\to\cdots\to i_{m_1}=j_{m_2}\to j_{m_2+1}\to\cdots\to j_{M-1}\to k,$$

$$j\to j_1\to\cdots\to j_{m_1}=i_{m_2}\to i_{m_2+1}\to\cdots\to i_{M-1}\to k$$

由式(2)$p_{i_{m_1}j_{m_2+1}}>0$，$p_{j_{m_1}i_{m_2+1}}>0$，再由 C－K 方程仍导致式(3)，但这是不可能的。

由于上述这些限制：没有一个状态对能使它的状态元素相同，也没有两个状态对能使它们的状态元素(不论其位置的次序)是相同的。因此，满足这些约束条件的状态对集合至多含有$\binom{N}{2}$对，这是因为从 N 个不同的元素中，不重复地抽出两个元素，不论其先后次序的元素对总数是$\binom{N}{2}$。既然每对(i_m, j_m)，$m=0, 1, \cdots, M-1$ 都要受到这些限制，所以 $M\leqslant\binom{N}{2}=N(N-1)/2$。引理证完。

由引理 1 及引理 2 立即可得下面的定理：

定理 1 设 P 是状态空间 $S=\{1,\cdots,N\}$ 的有限齐次马氏链的转移概率矩阵，则有某个 m 使得 $\alpha(P^m)>0$ 的充要条件是 $\alpha(P^{N(N-1)/2})>0$。

注 事实上已经证明：当 $N\geqslant3$ 时，可以用 $[(N-1)^2/2+1]$ 代替定理 1 中的 $N(N-1)/2$。

定理 1 已经向我们证实了一个 $N\times N$ 随机矩阵是否为遍历的问题，在计算机上是可以判定的。于是现在就应该考虑如何高效地作出判决，为此，首先注意到在检验 $\alpha(P^m)$ 是否大于零的过程中，并不需要知道转移概率 $p_{ij}^{(m)}(i, j\in S)$ 的具体数值，只要知道 $p_{ij}^{(m)}(i, j\in S)$ 是否非零就够了。于是可用转移概率矩阵 $P=[p_{ij}]$ 的关联矩阵 $Z=[z_{ij}]$ 来代替 P(参看 V. § 2)，这样就大大地简化了检验过程中的数值计算，然而所得到的检验效果却一样。虽然 $Z=[z_{ij}]$ 未必是随机矩阵，但是仍可定义 Z 的遍历系数如下：

$$\alpha(Z)\triangleq\min_{i,j\in S}\sum_{k\in S}\min(z_{ik},z_{jk}) \quad。\tag{4}$$

容易验证：对任给的 m 个 $N\times N$ 随机矩阵 $P(l)$，$l=1, \cdots, m$，又 $P(l)$ 的关联矩阵为 $Z(l)$，$l=1, \cdots, m$，则 $P(1)P(2)\cdots P(m)$ 与 $Z(1)Z(2)\cdots Z(m)$ 具有相同的关联矩阵。特别地，对任何正整数 m，P^m 与 Z^m 有相同的关联矩阵。故 $\alpha(P^m)>0$ 的充要条件是 $\alpha(Z^m)>0$，P 为遍历的充要条件是对某个正整数 m 有 $\alpha(Z^m)>0$。当然，对于较大的 m，在 Z^m 中有可能出现某些数值很大的元素，造成运算上的麻烦，为了回避这种情况的发生，仍然可以将在 $Z^2, \cdots, Z^m$ 中的正整数元素都简化为 1，即用 $Z^l=[z_{ij}^{(l)}]$ 的关联矩阵 $Z(l)=[z_{ij}(l)]$ 来代替 Z^l，$l=2, \cdots, m$，即 $z_{ij}(l)=\min\left\{1, \sum_{k\in s}z_{ik}^{(l-1)}z_{kj}\right\}$，$i, j\in S$，$l=2, \cdots, m$。在这里，不难看出 $\alpha(P^m)>0$ 的充要条件是 $\alpha(Z(m))>0$。因此以后不妨就将 Z^m 看作是 $Z(m)$。

例 1 随机矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1/3 & 2/3\\ 1/4 & 3/4 & 0\end{bmatrix}\tag{5}$$

的关联矩阵 Z 以及 Z^2 的关联矩阵 Z(2)依次为

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Z(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

容易算出 $a(P)=a(Z)=0$，而 $a(P^2)>0$，$a(Z(2))>0$ 所以 P 是遍历的。

应用 P 的关联矩阵 Z 而不是 P 本身的好处在于所有矩阵乘法都是对以 0 或 1 为元素的矩阵进行的，还可用不动点算法，所有计算是数值稳定的。应用 0 或 1 为元素的矩阵 $Z=[z_{ij}]$的另一个优点是

$$\sum_{k=1}^{N}\min(z_{ik},z_{jk}) = \sum_{k=1}^{N} z_{ik}z_{jk} \tag{7}$$

在计算上作乘积比作比较要快。

对任给的 $N\times N$ 随机矩阵 P，由 V．式(5)知 $0\leqslant a(P)\leqslant 1$。再利用 V．式(9)便知：如果 $a(P^m)>0$，则对任何 $l=1,2,\cdots$，都有 $a(P^{m+l})>0$。因此当 $a(Z^m)>0$(或 $a(Z(m))>0$)时，则 $a(Z^{m+l})>0$(或 $a(Z(m+l))>0$)，$l=1,2,\cdots$。明显地，计算乘幂 Z，Z^2，Z^4，Z^8，…，Z^{2^M}(或 Z，Z(2)，Z(4)，Z(8)，…，$Z(2^M)$)比计算乘幂 Z，Z^2，Z^3，…，$Z^{N(N-1)/2}$(或 Z，Z(2)，Z(3)，…，$Z(N(N-1)/2)$)效率更高。因此取 M 使得 $2^{M-1}\leqslant N(N-1)/2\leqslant 2^M$，逐次计算 $a(Z)$，$a(Z(2))$，$a(Z(4))$，$a(Z(8))$，…，$a(Z(2^M))$，观察其值是否大于零，这样遍历性问题便可较快地得到判定，对于中等大小的 N，这种在步骤上的简化是有意义的。当然由定理 1 之注在这里还可以用$\left[\dfrac{(N-1)^2}{2}+1\right]$来代替 $N(N-1)/2$。

运用定理 1 所给出的遍历性判定准则，以及上面所述的关联矩阵 $Z(2^M)$，立即联想到两种明显的算法：一种是对满足 $2^{M-1}\leqslant N(N-1)/2\leqslant 2^M$ 的 2^M 求出 Z^{2^M}(或 $Z(2^M)$)，然后计算 $a(Z(2^M))$；另一种是对每个 $M=1,2,\cdots$计算 $a(Z(2^M))$，直到 $a(Z(2^M))>0$ 或 $2^M\geqslant N(N-1)/2$为止。显然，如果马氏链是遍历的，则第一种做法是低效的，如果马氏链是非遍历的，则第二种做法是低效的。

例 2　设 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$是离散参数有限齐次马氏链，其状态空间 $S=\{1,2,3,4\}$，转移概率矩阵 P 及其关联矩阵 Z 依次为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

容易算得 $a(Z)=0$，$a(Z^2)$与 $a(Z(2))$皆大于零。因此应用第二种算法仅在第二步就判定出 X 是遍历的。如果采用第一种算法，那么首先要由 $2^M\geqslant 4(4-1)/2=6$ 确定出 $M=3$，然后依次算出 Z^2，Z^4，Z^8(或 Z(2)，Z(4)，Z(8))，最后计算 $a(Z(8))$。这里，在显示出 $a(Z(8))>0$ 之前就先要算出 Z^2，Z^4，Z^8，相比之下显然不如采用第二种算法效率高。

如果 X 的转移概率矩阵 P^* 及其关联矩阵 Z^* 依次呈如下形式：

$$P^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Z^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

那么相应的马氏链 X 具有周期子类 $G_0=\{1,2\}$，$G_1=\{3,4\}$。于是对任何正整数 m，在 P^{*m}（或 Z^{*m}）中总可找到两行，其中位于同一列的两个元素总有一个为零，因此在这样的情况下 $\alpha(P^{*m})=0$，或 $\alpha(Z^{*m})=0$，$\alpha(Z^*(m))=0$，$m=1,2,\cdots$。特别地，$\alpha(Z^*(2^M))=0$，$M=1,2,\cdots$，由此可见，在这里使用第二种算法是低效的。

作为第一与第二这两种极端算法之间的一种折衷方法是应用 $Z(2^M)$ 的某种性质来确定是否还要去计算遍历系数。直观地，如果遍历系数很有可能是正的，那就应该计算遍历系数。如果看起来遍历系数似乎将是零，那就应该去作 Z^{2^M} 的平方即 $Z^{2^{M+1}}$，也就是考察 $Z(2^{M+1})$。为了判定遍历性，将这种直观的做法形式化的一种尝试，我们来叙述"列和法"。

在每一步求 $Z(2^M)$ 各列的元素之总和。如果在 $Z(2^M)$ 中若有一列元素之总和为 N，则遍历系数 $\alpha(Z(2^M))>0$，从而马氏链必是遍历的。如果在 $Z(2^M)$ 中，若有一列元素之总和等于 $N-1$，那么也有相当的可能使遍历系数 $\alpha(Z(2^M))>0$。在这情形下无论如何遍历系数的计算是大大地简化了。事实上，如果 $Z(2^M)$ 的第 j 列中仅有一个零元素，并且此零元素出现在第 i 行上，于是为检验 $\alpha(Z(2^M))$ 是否为正的，只要将第 i 行与其它 $N-1$ 行作比较就足够了。而在一般情形下却要作 $\binom{N}{2}$ 次比较。这便节省了大量的运算与比较。现将"列和法"归纳成如下的规则：

① 第一步求 $Z(2^M)$ 各列元素之总和。

② 若 $Z(2^M)$ 中有一列元素之总和为 N，则此马氏链是遍历的，判决终止。

③ 若 $Z(2^M)$ 中有一列元素之总和为 $N-1$，便计算 $\alpha(Z(2^M))$。如果 $\alpha(Z(2^M))>0$，则此马氏链是遍历的，判决终止。如果 $\alpha(Z(2^M))=0$，则考虑矩阵 Z^{2^M} 的平方 $Z^{2^{M+1}}$，即对 $Z(2^{M+1})$ 重复上面所述的步骤。

④ 若 $Z(2^M)$ 中没有一列元素之总和为 N 或 $N-1$，便考察 Z^{2^M} 的平方，即对 $Z(2^{M+1})$ 重复上述步骤。这些规则已被概括总结在流程图 1 中了。

下面的例子说明了判定遍历性的列和方法的具体使用过程。

例 3 仍采用例 2 所给出的转移概率矩阵 P 及其关联矩阵 Z，如式(8)所示。Z 的第三列元素之总和为 $N-1=4-1=3$，但是 $\alpha(Z)=0$，故计算

$$Z(2)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}, \tag{10}$$

$Z(2)$ 的第三列元素的总和为 N，由此可知 P 是遍历的。

再考察例 2 中所给出的另一个转移概率矩阵 P^* 及其关联矩阵 Z^*，如式(9)所示。因为 Z^* 中各列元素之总和的最大值 $2<N-1$，所以我们立即去计算

$$Z^*(2)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}, \tag{11}$$

$Z^*(2)$ 中各列元素之总和的最大值仍为 $2(<N-1)$，在没有计算任何遍历系数的情形下，接着去算出 $Z^*(8)$，这里 $8>\dfrac{N(N-1)}{2}=6$。因为 $\alpha(Z^*(8))=0$，由此即可判定 P^* 是非遍历的。

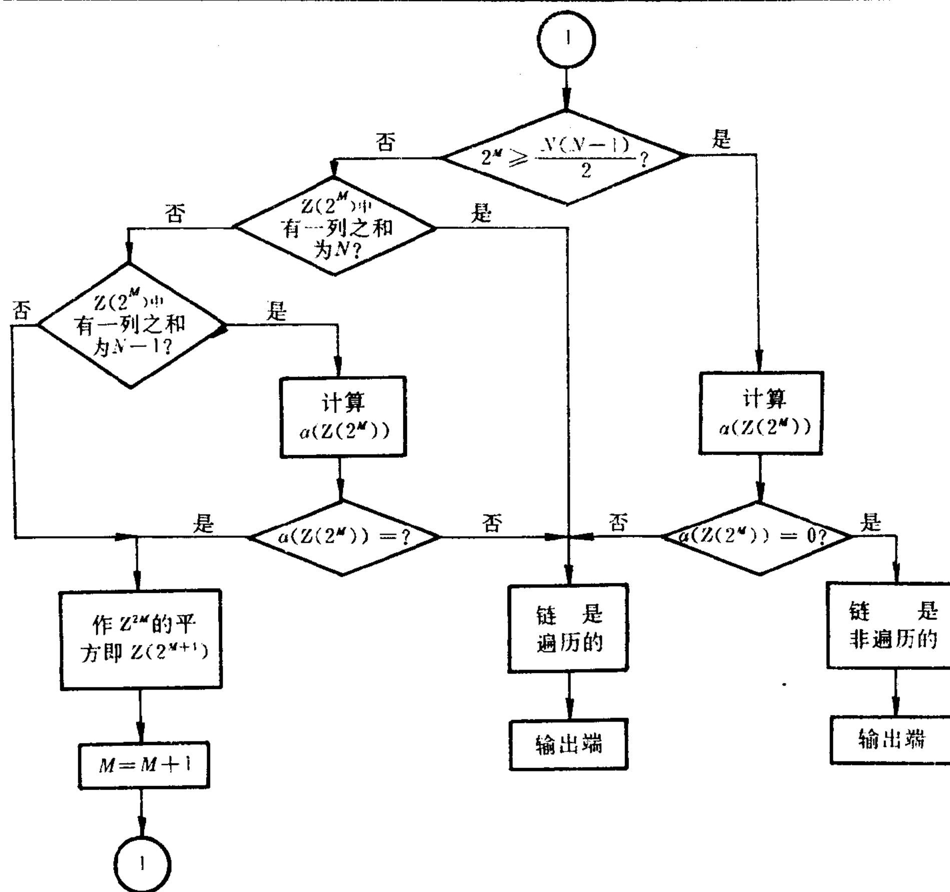


图 1　列和法流程图

§2　马尔科夫链的分析

在判定了马氏链是遍历的或是非遍历的之后，下一步就应对马氏链作进一步的分析。为此先给出一个以后要用的引理。

引理 3　设 $P=[p_{ij}]$ 是 $N\times N$ 随机矩阵，如果 $i\neq j(i,j\in S)$，有某个正整数 m 使得 $p_{ij}^{(m)}>0$，则必有正整数 l：$l\leqslant N-1$，使 $p_{ij}^{(l)}>0$。如果有正整数 m 使得 $p_{ii}^{(m)}>0$，则必有正整数 l：$l\leqslant N$，使 $p_{ii}^{(l)}>0$。

证　假定 $i\neq j$，对某个 m 有 $p_{ij}^{(m)}>0$，这意味着从状态 i 转移到状态 j 至少有一条路径：$i=i_0\to i_1\to\cdots\to i_{m-1}\to i_m=j$ 具有正概率，即 $p_{ij}^{(m)}\geqslant p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{m-1}j}>0$ 去掉此路径中的所有回路，即若 $i_k=i_{k+r}$，便去掉 $i_k\to i_{k+1}\to\cdots\to i_{k+r}$ 这一段路径，用 $p_{i_ki_{k+r+1}}$ 来代替 $p_{i_ki_{k+1}}p_{i_{k+1}i_{k+2}}\cdots p_{i_{k+r}i_{k+r+1}}$，这样所得到的新路径 $i=i'_0\to i'_1\to\cdots\to i'_l=j$ 中，i'_0，i'_1，…，i'_l 这 $l+1$ 个状态两两都不相同。既然 S 只含有 N 个不同的状态，因此不仅 $l\leqslant m$，而且 $l+1\leqslant N$，故 $l\leqslant N-1$，并由 C-K 方程有

$$p_{ij}^{(l)}\geqslant p_{ii'_1}p_{i'_1i'_2}\cdots,p_{i'_{l-1}j}\geqslant p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{m-1}j}>0$$

对于 $i=j$ 的情形用类似的方法可证。引理证完。

1. 非遍历马尔科夫链的分析

现在考虑对非遍历随机矩阵进行分析的问题。首先将此矩阵写成分块矩阵的形式，基本的想法是由一个常返状态去生成包含有此状态在内的不可分闭子集。接连不断地这样做下去，直到不再有剩下的常返状态为止。由此可见，头一个问题是如何寻求一个常返状态。

由Ⅱ．§1.4中的定义及Ⅱ．§2. 定理13知：状态i是常返的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1,\quad 或\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty 。$$

这些条件在大多数情形中在计算机上是不可能检验的，所以在一个非遍历的随机矩阵中，应该给出寻求常返状态的某种可供选择的方法。为了开发这样的方法，我们对于用来判定遍历性的列和法进行修改。特别是原先的列和法要求逐次地考察矩阵幂Z^{2^M}直到$\alpha(Z(2^M))>0$或$2^M\geqslant N(N-1)/2$为止，而现在要求考察的幂直到$\alpha(Z(2^M))>0$或$2^M\geqslant(N-1)^2$为止。幂次$(N-1)^2$的意义在下一个定理中将变得显而易见。为了记法上的方便，令L就是使遍历性问题得以判定的Z的幂次。对于非遍历马氏链有$L\geqslant(N-1)^2$，因此下列定理可用于寻求常返状态。读者会发现该定理的证明有点难以领会，于是对仅有一个常返状态的不可分闭子集，并且仅有一个或两个非常返状态的特殊情形去完成该定理的证明会是有益的。

定理2　设P是一非遍历的随机矩阵，如果P^L的关联矩阵$Z(L)$的第i列中的元素之总和是最大的，即$\sum_{j=1}^{N} z_{ji} = \max_{1\leqslant k\leqslant N}\sum_{j=1}^{N} z_{jk}$，则状态$i$是常返的。

证　根据状态空间的分解定理，以D记状态空间S中全体非常返状态集，又以C_1，…，C_m记常返状态的不可分闭子集，S可表示成不交并$D\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$。如果$D=\varnothing$，则$S$中所有的状态都是常返的。当然具有最大列和的状态也是常返的，故结论成立。现在设$D\neq\varnothing$，为了使论证清楚起见，将P的关联矩阵Z及其幂Z^L写成分块矩阵的形式：

$$Z=\begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_m & 0 \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_m & B \end{bmatrix},\quad Z^L=\begin{bmatrix} Z_1^L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Z_2^L & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_m^L & 0 \\ A_1^* & A_2^* & \cdots & A_m^* & B^L \end{bmatrix},\qquad (12)$$

这里Z_l是相应于$[p_{ij}]_{i,j\in C_l}$的关联矩阵，$l=1$，…，m，B是相应于$[p_{ij}]_{i,j\in D}$的关联矩阵，并假定B^L的关联矩阵中有一列，它含有l个1，那么只要能够证明：在Z^L的关联矩阵$Z(L)$中，所有对应于$C_1\cup\cdots\cup C_m$此状态集的全部列里必存在着至少含有$l+1$个1的列就足够了。

不失一般性，假定在B^L中对应于状态$j(j\in D)$的那一列有l个1，这就是说，从l个不同的非常返状态j_1，…，j_l出发经L步转移都能达到状态j。又根据Ⅱ．定理42及有限马氏链的假设，从非常返状态j出发至少要达到一个常返状态，仍不失一般性可假定存在某个正整数M及常返状态$i\in C_1$使得关联矩阵$Z(M)$中元素$z_{ji}(M)=1$。所以由相应于Z^{L+M}(或$Z(L+M)$)的转移概率矩阵P^{L+M}知：从这些l个非常返状态j_1，…，j_l出发都可达到常返状态i。在假定了存在若干非常返状态的前提之下，C_1中所含的状态个数最多不超过$N-1$，于是将引理3应用到不可分常返状态闭子集C_1上便知必存在正整数$b\leqslant N-1$使得$z_{ii}(b)=1$。进而再按C_1是非周期的或周期的两种情形分别进行考虑。

如果 C_1 是非周期的，那么应用转移概率矩阵 P^b，P^{2b}，…或 Z^b，Z^{2b}，…，从这些 l 个 D 中的状态 j_1，…，j_l 出发都可达到常返状态 i。即因 C_1 是非周期的，利用数论知识可证[13]：以此 P^b 为转移概率矩阵的马氏链不存在有持续避开状态 i 的危险。又因状态空间仅有 N 个状态，所以在任何两个不同状态之间的所有可能转移路径中，去掉转移路径中的一切回路，这样从一个状态到另一个状态的可能转移总可以经过 $N-1$ 步或更少步数的转移后完成。因此应用转移概率矩阵 P^b，以这 l 个非常返状态 j_1，…，j_l 中的每个状态出发，都能在经过 $N-1$ 步或更少步数的转移后达到状态 i。注意到在这转移概率矩阵 P^b 或相应的 Z^b、$Z(b)$ 之下，因为 $z_{ii}(b)=1$，即相应的 $z_{ii}^{(b)}>0$，$p_{ii}^{(b)}>0$，一旦进程达到状态 i，必以正概率保持逗留在状态 i 上。于是在 $Z(b(N-1))$ 中，对任何 j_r，$r=1$，…，l 有 $z_{j_r i}(b(N-1))=1$。既然 C_1 是闭的常返状态集，那么必有某个状态 $k\in C_1$，使 $p_{ik}^{(L-b(N-1))}>0$，相应地有 $z_{ik}(L-b(N-1))=1$，从而得

$$1 \geqslant z_{j_r k}(L) \geqslant z_{j_r i}(b(N-1))z_{ik}(L-b(N-1)) = 1,\quad r=1,\cdots,l。\tag{13}$$

又由于不可分转移概率矩阵中的每一列至少有一个正元素，故对应于 C_1 的矩阵 $[z_{ij}(L)]_{i,j\in C_1}$ 中的每一列都至少有一个 1。综上所证便知 $Z(L)$ 中的第 k 列至少有 $l+1$ 个 1，结论得证。

如果 C_1 有周期 d，由 Ⅰ. 定理 38 及定理 40，C_1 可分解成 d 个周期类 G_0，G_1，…，G_{d-1}，使得在转移概率矩阵 P 之下，此马氏链的运动统计规律是从 G_n 中的状态出发，下一步必定转移到 G_{n+1} 之中，$n=0$，…，$d-1$，这里 G_d 理解为 G_0。这些周期类中的每一个都可作为是在转移概率矩阵 P^d 之下的一个不可分非周期马氏链的状态空间。于是只要把对应于 P^d 或 Z^d 的关联矩阵 $Z(d)$ 来代替 P 的关联矩阵 Z，而用 G_0，G_1，…，G_{d-1} 中之一来代替 C_1，这里的周期情形就简化为前面的非周期情形了。要注意的是，因为在所考虑的情形下从这 l 个非常返状态 j_1，…，j_l 出发经 L 步转移能够达到状态 j，那么从这 l 个非常返状态 j_1，…，j_l 出发经过若干 d 的倍数步转移，无论如何是要进入到 G_0，G_1，…，G_{d-1} 之一中去的。为了提供论据，我们假设 $z_{j_r i}(md)=1$，$r=1$，…，l。还要注意到在非周期情形中所选定的，使 $z_{ii}(b)=1$ 的正整数 b 现在该呈这样的形式 $b=kd\leqslant N-1$。对此，不再作详细的论证了。

例 4　设有限齐次马氏链 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的转移概率矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix},\tag{14}$$

状态空间 $S=\{1,2,\cdots,6\}$。容易看出此链有两个由常返状态构成的不可分闭子集 $C_1=\{1,4\}$，$C_2=\{5\}$，而其余的状态 2，3，6 都是非常返的。现在使用定理 2 所给出的方法，式(14)P 的关联矩阵 Z 为

$$Z=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}。\tag{15}$$

现在 $N=6$，使 $2^M\geqslant(N-1)^2=25$ 的最小的正整数 $M=5$，即 $L=2^5=32>25$。而且 $Z^L=Z^{32}$ 的关联矩阵为

$$Z(32)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0&1\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&1\end{bmatrix}。\tag{16}$$

在此 $Z(32)$ 中第 1 列与第 4 列的元素之和皆为 5，这是最大的列和，由定理 2 即可断定相应的状态 1 与 4 是常返的。定理 2 仅仅提供了一种寻求一个常返状态的方法。如果想要找出所有的常返状态那么还需要更多的理论。

一旦找到了一个常返状态 i，则由此状态 i 生成的不可分闭的状态子集 $C(i)$ 可构造如下：令 $G_0=\{j:z_{ij}(L)=1,\ j\in S\}$，如果 i 是非周期的，那么 G_0 就是由状态 i 生成的完全的不可分的闭的状态子集。然而，因为 i 也可能是周期的，所以令 $G_1=\{j:z_{ij}(L+1)=1,\ j\in S\}$，如果 $G_1=G_0$，则便知状态 i 是非周期的，而且 $G_0=C(i)$。如果 $G_1\neq G_0$，那么我们继续求出 $G_2=\{j:z_{ij}(L+2)=1,\ j\in S\}$，如此等等直到 $G_d=G_0$ 为止。这个使 $G_d=G_0$ 的最小的正整数 d 就是 $C(i)$ 的周期，而且 $C(i)$ 被确定为 $C(i)=\bigcup_{l=0}^{d-1}G_l$。这个过程得到了由状态 i 生成的不可分闭子集并确定了它的周期。

下一步工作是要寻求另外的常返状态以及与它相联系的闭集。若在 $Z(L)$ 中能够直接找到含 1 的个数是次最大的列，此列所对应的状态是否为常返的呢？这是需要慎重考虑的。回到例 4 上，我们已知状态 1 是常返的，而且 $C(1)=\{1,4\}$。又在式(16)的 $Z(32)$ 中，除了第 1 与第 4 列之外，含有元素 1 的个数次最大的是第 2、第 3、第 6 列，令人遗憾地是所有这些列对应的状态 2、3、6 都是非常返的。因此定理 2 所提供的这种方法不能直接地帮助我们去寻求除了状态 1、4 之外的其它常返状态了。

然而，我们可以通过运用下列措施来寻求另外的常返状态。在这一点上，由 Ⅱ．定理 34 及定理 35，$C(i)$ 中的所有状态都已被分类为常返的，因此可以从进一步考察寻求的范围内略去 $C(i)$。此外，对任何一个在 $C(i)$ 之外的状态 $k(\notin C(i))$，如果从状态 k 出发能够达到 $C(i)$ 内的某个状态 j，则此 k 必定是非常返状态。事实上，倘若状态 k 是常返的，由 Ⅱ．定理 15 之推论知 k 是本质状态，那么由 j 可达到 k，既然 $j\in C(i)$。且 $C(i)$ 为闭集，故 $k\in C(i)$，这与 $k\notin C(i)$ 矛盾。所以这时在 $C(i)$ 之外又从它们出发可达到 $C(i)$ 内的状态集也可略去不予考虑。

鉴于这些评注，可将相应于 P^L 或 Z^L 的关联矩阵 $Z(L)$ 改变成下面的形式，即在 $Z(L)$ 里，

将对应于 $C(i)$ 中状态的所有行和列的元素都置为零，同时将对应于从它出发能达到 $C(i)$ 内的状态的所有行和列的元素也都置为零。下面的步骤将是让计算机去执行完成上面所述的操作。首先从 $C(i)$ 里面的每个不相交子集 $G_l=\{j:z_{ij}(L+l)=1,\ j\in S\}$ 中选择一个状态 $k_l\in G_l$，$l=0,1,\cdots,d-1$，并定义：

$$\mathscr{D}_0=\{j:z_{jk_0}(L)=1,j\in S\},\quad \mathscr{D}_1=j\{j:z_{jk_1}(L)=1,j\in S\},\cdots,$$

$$\mathscr{D}_{d-1}=\{j:z_{jk_{d-1}}(L)=1,j\in S\},\quad \mathscr{D}=\bigcup_{l=0}^{d-1}\mathscr{D}_l。\tag{17}$$

既然 $C(i)$ 是由常返状态 i 生成的不可分闭集，$C(i)=\bigcup_{l=0}^{d-1}G_l$，以及Ⅰ．定理 15 与定理 34，由此可得 $\mathscr{D}$ 包含了所有与状态 i 互通的常返状态以及所有从它出发能达到状态 i 的非常返状态，现在定义一个新的矩阵 $Z^*=[z_{ij}^*]_{i,j\in S}$ 如下：

$$z_{ij}^*=\begin{cases}z_{ij}(L), & 当\ i,j\in S-\mathscr{D},\\ 0, & 其它。\end{cases}\tag{18}$$

于是 Z^* 的任何具有最大列和的列再次重新对应于常返状态。从而前面早已叙述过的寻求与常返状态相联系的不可分闭集的方法又能被使用了。回到例 4 上，我们看出 $C(1)=\{1,4\}$ 而 $\mathscr{D}=\{1,2,3,4,6\}$，因此

$$Z^*=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}。\tag{19}$$

Z^* 中含元素 1 的个数最大的列是第 5 列，所以状态 5 是常返的。对此 Z^* 立即可知 $G_0^*=G_1^*=\{5\}$，故与状态 5 相联系的闭集是吸收集 $\{5\}$。

总之，对 Z^L 相应的 $Z(L)$ 施行的这种简化变形手续可以继续做下去，直到此矩阵只含零元素为止。到此所有的不可分闭子集及它们各自的周期都被识别确定出来，剩下的状态都是非常返的。至此只要将 P 中某些适当的行和列的位置作一简单地交换，很容易地就可将 P 写成分块的形式了，

$$P=\begin{bmatrix}P_1&0&0&\cdots&0&0\\0&P_2&0&\cdots&0&0\\0&0&P_3&\cdots&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&P_m&0\\R_1&R_2&R_3&\cdots&R_m&Q\end{bmatrix},\tag{20}$$

其中 P_l 是对应于常返状态不可分闭子集 C_l 的 P 子矩阵，Q 是对应于全体非常返状态集 D 的 P 子矩阵，并记 $Q=[q_{ij}]_{i,j\in D}$。

分析非遍历随机矩阵的最后一个问题是寻求从非常返状态出发的平均吸收时间与吸收概率(参看Ⅱ．§4)。容易看出：对任何正整数 n，由式(20)有

$$P^n=\begin{bmatrix} P_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3^n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_m^n & 0 \\ R_1^{(n)} & R_2^{(n)} & R_3^{(n)} & \cdots & R_m^{(n)} & Q^n \end{bmatrix}, \tag{21}$$

若记 $Q^n=[q_{ij}^{(n)}]_{i,j\in D}$，则对任何 $n=1,2,\cdots$ 及 $i,j\in D$ 有

$$0\leqslant q_{ij}^{(n)}\leqslant 1,\quad \sum_{j\in D}q_{ij}^{(n)}\leqslant 1,\quad q_{ij}^{(n+1)}=\sum_{k\in D}q_{ik}q_{kj}^{(n)}。\tag{22}$$

引理 4 设 $X=\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是有限齐次马氏链，X 的状态空间 S 为 $\{1,\cdots,N\}$，X 的转移概率矩阵 P 已写成分块形式(20)，则存在

$$(I-Q)^{-1}=I+Q+Q^2+\cdots,\tag{23}$$

其中 I 是与 Q 有相同行(列)数的单位矩阵。

证 记 $Q^0=I$，$M_n=I+Q+\cdots+Q^n$，$n=1,2,\cdots$，则有

$$M_n(I-Q)=(I-Q)M_n=I-Q^{n+1},\ n=1,2,\cdots,\tag{24}$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，M_n 收敛的充要条件是 $\sum_{l=0}^{n}Q^l$ 收敛。如果 M_n 收敛于 M，那么 $Q^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ 即收敛于零矩阵。于是由式(24)得

$$M(I-Q)=(I-Q)M=I,\tag{25}$$

此即 $M=(I-Q)^{-1}$，式(23)得证。

为了证明 $M_n=\sum_{l=0}^{n}Q^l$ 收敛，只要证：对任何非常返状态 i，$j\in D$，有 $\sum_{n=0}^{\infty}q_{ij}^{(n)}<\infty$ 就足够了。为此我们首先指出 $\sum_{n=0}^{\infty}q_{ij}^{(n)}$ 表示马氏链 X 从状态 i 出发到达状态 j 的期望次数。假定 $X_0=i$，定义

$$\begin{cases} Y_n=1, & \text{如果 } X_n=j, \\ Y_n=0, & \text{如果 } X_n\neq j, \end{cases}\qquad n=0,1,\cdots,\tag{26}$$

显然 $EY_n=q_{ij}^{(n)}$，而 $\sum_{n=0}^{\infty}Y_n$ 表示 X 从状态 i 出发到达状态 j 的次数，于是应用傅比尼定理可得

$$E\Big[\sum_{n=0}^{\infty}Y_n\Big]=\sum_{n=0}^{\infty}EY_n=\sum_{n=0}^{\infty}q_{ij}^{(n)}。\tag{27}$$

此外表示 X 从状态 i 出发到达状态 j 的期望次数还有另一种方式，即定义随机变量 W_{ij} 为 X 从 i 出发到达 j 的次数。回忆 Ⅰ. 式(4) f_{ij} 表示 X 从 i 出发经有限多步转移终于要到达 j 的条件概率，f_{jj} 表示 X 从 j 出发终于要返回到 j 的条件概率。因此有：

$$P(W_{ij}=l)=f_{ij}f_{jj}^{l-1}(1-f_{jj}),\qquad l=1,2,\cdots,\tag{28}$$

应用此式便得

$$EW_{ij}=\sum_{l=1}^{\infty}lf_{ij}f_{jj}^{l-1}(1-f_{jj})=\frac{f_{ij}}{1-f_{jj}},\qquad i,j\in D,\quad i\neq j。\tag{29}$$

(如果 $i=j$，应再加上 1，因为在零时刻已达到 j)既然 j 是非常返状态。由 Ⅰ. 定理 13 $f_{jj}<1$，故依式(29) $EW_{ij}<\infty$。然而 $E\Big[\sum_{n=0}^{\infty}Y_n\Big]=EW_{ij}$，于是从式(27)便得 $\sum_{n=0}^{\infty}q_{ij}^{(n)}<\infty$，$i$，$j\in D$，即 I

$+Q+Q^2+\cdots$收敛于一有限矩阵 M，且 $M=(I-Q)^{-1}$，引理证完。

定理 3　设 X 是一有限齐次马氏链，其状态空间 S 与转移概率矩阵 P 已如引理 4 所给。又记 E_i 为 X 从非常返状态 $i(\in D)$ 出发的平均吸收时间，即进入常返状态集的平均时间，记列向量 $E=[E_i]_{i\in D}$，则有：

$$E=[E_i]_{i\in D}=M\mathbf{1}'。\tag{30}$$

其中 $\mathbf{1}$ 是元素皆为 1 的与 D 相应的行向量 $[1,\ \cdots,\ 1]$。

证　依 E_i 的定义，对任何 $i\in D$ 有

$$\begin{aligned}E_i&=\sum_{l=1}^{\infty}lP(X\text{ 从 }i\text{ 出发,在第 }l\text{ 步被吸收})\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{l-1}P(X\text{ 从 }i\text{ 出发,在第 }l\text{ 步被吸收})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty}P(X\text{ 从 }i\text{ 出发,在第 }l\text{ 步被吸收})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P(X\text{ 从 }i\text{ 出发,在第 }n\text{ 步以后被吸收})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P(X\text{ 从 }i\text{ 出发,经 }n\text{ 步转移未被吸收})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in D}q_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in D}\sum_{n=0}^{\infty}q_{ij}^{(n)},\end{aligned}\tag{31}$$

式(31)中第三个与最后一个等号成立是因为使用了傅比尼定理。再由引理 4 即得本定理。

尽管在非常返状态较多的情形下，计算逆矩阵$(I-Q)^{-1}$并不容易，但是比起求 $q_{ij}^{(n)}$，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ i,\ j\in D$及$\sum_{j\in D}\sum_{n=0}^{\infty}q_{ij}^{(n)}$无疑要容易得多，而且求逆矩阵已有不少算法可在计算机上完成。因此由引理 4 及定理 3 提供的这种平均吸收时间的计算方法是方便而有效的，常称为**基本矩阵法**，称 M 为**基本矩阵**。沿用此方法还可计算出吸收概率。

定理 4　设 X 是一有限齐次马氏链，状态空间 S 与转移概率矩阵 P 已如引理 4 所给，对任给的非常返状态 $i\in D$ 及任给的常返状态 $k\in S-D=D^c$，用 a_{ik}记 X 从 i 出发被 k 吸收的概率，以 a_{ik}，$i\in D$，$k\in D^c$ 为元素构成的矩阵记作 $A=[a_{ik}]_{i\in D,k\in D^c}$。又将式(20)中，$P$ 的子矩阵 $[R_1\ R_2\ R_3\cdots R_m]$ 记作 R，则有

$$A=MR。\tag{32}$$

证　为了使证明在记号上简便起见，不失一般性假定仅有两个非常返状态，即 $D=\{i,\ j\}$。又以 r_{ik}记 X 从非常返状态 i 出发经一步转移到常返状态 k 的概率。实际上，r_{ik} $i\in D,k\in D^c$ 就是 R 中的元素，而且 $r_{ik}=p_{ik}$。仍记 $q_{ij}=p_{ij}$，i，$j\in D$。显然应有：对 $i\in D$，$k\in D^c$

$$\begin{aligned}a_{ik}&=r_{ik}+q_{ii}r_{ik}+q_{ij}r_{jk}+q_{ii}^{(2)}r_{ik}+q_{ij}^{(2)}r_{jk}+\cdots+q_{ii}^{(n)}r_{ik}+q_{ij}^{(n)}r_{jk}+\cdots\\&=r_{ik}\sum_{n=0}^{\infty}q_{ii}^{(n)}+r_{jk}\sum_{n=0}^{\infty}q_{ij}^{(n)}。\end{aligned}\tag{33}$$

由式(33)及引理 4 中的式(23)即得式(32)，定理得证。

例 5　设 $X=\{X_n,\ n=0,\ 1,\ \cdots\}$ 是以 $S=\{1,\ \cdots,\ 10\}$ 为状态空间的有限齐次马氏链，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1/2&0&1/2&0&0&0&0&0&0\\0&0&1/2&0&1/2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\1/4&0&1/4&0&1/4&1/4&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1/10&1/10&1/10&1/10&1/10&1/10&1/10&1/10&1/10&1/10\end{bmatrix}, \quad (34)$$

相应的关联矩阵为

$$Z=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}, \quad (35)$$

因为链 X 是非遍历的，并且 $(N-1)^2=(10-1)^2=81$，故必须取 7 以便 $2^7=128\geqslant 81(2^6=64<81)$，$P^{128}$或 Z^{128}相应的关联矩阵为

$$Z(128)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}, \quad (36)$$

由列和法知状态 2，4，8 和 9 是常返的。从状态 2 开始可得 $G_0=\{2,4,8,9\}$，而且 $G_1=\{2,4,8,9\}$，因此不可分闭集 $\{2,4,8,9\}$ 是非周期的。对应于此闭集的状态集 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_0=\{2,4,8,9,10\}$，从而新矩阵 Z^* 呈如下形式：

$$Z^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

再次应用列和法可以看出状态 1 和 5 是常返的。再从状态 1 开始得到 $G_0=\{1\}$，$G_1=\{5\}$，$G_2=\{1\}$。于是由状态 1 生成的不可分闭集是 $\{1, 5\}$，并且它有周期 2。又对应于此闭集的集 $\mathscr{D}'=\mathscr{D}'_0\cup\mathscr{D}'_1$，这里 $\mathscr{D}'_0=\{1, 3, 7\}$，$\mathscr{D}'_1=\{3, 5, 7\}$。而现在的新矩阵 $Z^{*'}$ 呈下面的形式：

$$Z^{*'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{38}$$

由此可见状态 6 是吸收状态。将 P 中的行和列重新按(2，4，8，9，1，5，6，3，7，10)的次序排列，就可将 P 重写成分块矩阵的形式，得

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \end{bmatrix}, \tag{39}$$

应用定理 3 与定理 4，计算

$$Q=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 1/4 & 0 & 0\\ 1/10 & 1/10 & 1/10\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10\end{bmatrix}, \tag{40}$$

$$M=(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ -1/4 & 1 & 0\\ -1/10 & -1/10 & 9/10\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 5/18 & 1/9 & 10/9\end{bmatrix}, \tag{41}$$

故由式(30)与式(32)得平均吸收时间与吸收概率：

$$E'=[E_3,E_7,E_{10}]=[1,1,1]\begin{bmatrix}2 & 1/2 & 5/18\\ 0 & 1 & 1/9\\ 0 & 0 & 10/9\end{bmatrix}=[2,3/2,3/2]。 \tag{42}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{32} & a_{34} & a_{38} & a_{39} & a_{31} & a_{35} & a_{36}\\ a_{72} & a_{74} & a_{78} & a_{79} & a_{71} & a_{75} & a_{76}\\ a_{10,2} & a_{10,4} & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,1} & a_{10,5} & a_{10,6}\end{bmatrix}=MR$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 5/36 & 5/18 & 5/36\end{bmatrix}。 \tag{43}$$

2. 遍历马尔科夫链的分析

分析遍历马氏链的重要问题是寻求链的平稳分布。我们已经知道：如果以 $S=\{1,\cdots,N\}$ 为状态空间，以 $P=[p_{ij}]$ 为转移概率矩阵的有限齐次马氏链 X 是遍历的，那么必有平稳分布 $\{\pi_i,\ i\in S\}$，记作 $\pi=[\pi_1,\ \cdots,\ \pi_N]$。而且此 π 可通过求方程组 $\pi P=\pi$ 的满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_i=1$ 的非负解而得到。我们将给出在计算机上求解此方程组的两种方法。

方程组 $\pi P=\pi$ 有无穷多个解，为了得到平稳分布必须应用条件 $\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_i=1$。应用此条件的一种方法是用方程 $\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_i=1$ 代换 N 个方程 $\pi_j=\sum\limits_{k=1}^{N}\pi_k p_{kj}$，$j=1,\ \cdots,\ N$ 中的任何一个，所得的含有 N 个未知数的 N 个方程组有唯一解，并且可应用许多标准程序中的一种，在计算机上求得此解。

解 $\pi P=\pi$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_i=1$ 的第二种方法是将含 N 个未知数的 N 个方程组 $\pi P=\pi$ 简化成含有 $N-1$ 个未知数的 $N-1$ 个方程的并具有唯一解的方程组。然后再用条件 $\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_i=1$ 得到平稳分布。即因方程组 $\pi P=\pi$ 具有多余的未知数，于是通过用常数 1 取代 π_i，$i=1,\ \cdots,\ N$ 中的一个，可得到一个可解的方程组。使用这种方法仅有的问题是置为 1 的 π_i 必须不是 $\pi P=\pi$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_i=1$ 的解向量中的零元素。换言之，π 中置为 1 的坐标 π_i 对应的状态 i 必须是正常返的而不是非常返的。所以在确定了马氏链的遍历性时，如果应用这种方法，对任一常返状态必须能被进一步识别是正常返的还是零常返的。

下面的四个引理指出：在一个遍历的随机矩阵上应用列和方法保证能找到一个常返状态。前三个引理指出：列和方法总能找到一列，该列上所有元素的总和是 N 和 $N-1$。最后一个引理指出相应于此列的状态是常返的。

引理 5　如果 $P(1)$ 和 $P(2)$ 是两个同阶的随机矩阵，又 $P(1)$ 的第 k 列无零元素，即 $p_{jk}^{(1)}>0, j\in S$，则积 $P(2)P(1)$ 的第 k 列无零元素。

证　$P(2)P(1)$ 的第 k 列元素为 $\sum_{j\in S} p_{ij}(2)p_{jk}(1)$，$i\in S$。既然 $p_{ij}(2)\geqslant 0$，$\sum_{j\in S} p_{ij}(2)=1$，$i, j\in S$，$p_{jk}(1)>0$，$j\in S$。故 $\sum_{j\in S} p_{ij}(2)p_{jk}(1)>0$，$i\in S$。证完。

引理 6　设 P 是一个有限齐次马氏链 X 的 $N\times N$ 转移概率矩阵，$N>1$。如果马氏链 X 是不可分的非周期的，那么对某个状态 i 必存在一个 $l\leqslant N-1$（l 可以是有赖于 i 的）使得 $p_{ii}^{(l)}>0$。

证　如果对所有的状态 i 都是 $p_{ii}^{(l)}=0$，$l=1, \cdots, N-1$，因为 X 是有限不可分马氏链，依Ⅳ. 定理 2 之推论每个状态 i 都是正常返的，于是必有某正整数 l 使 $p_{ii}^{(l)}>0$，再利用引理 3 便知 $p_{ii}^{(N)}>0$，故当且仅当 l 为 N 的正整数倍数时才有 $p_{ii}^{(l)}>0$，即 i 是周期为 N 的周期状态，这与 X 是非周期的假定矛盾。由此引理得证。

回顾第四章定理 9 之推论 2，便知一个 $N\times N$ 遍历随机矩阵 P 必存在 P 的某次幂 P^{m_0} 使它具有一列无一零元素。下面的引理提供了一种这样一些值 $\{m_0\}$ 的上界，可作为未曾证明的Ⅳ. 定理 10 的一种补偿。

引理 7　设 P 是一有限齐次马氏链 X 的 $N\times N$ 转移概率矩阵。P 的某次幂具有一列无一零元素的充要条件是 $P^{(N-1)^2}$ 具有一列无一零元素。

证　假定 P 的某次幂 P^{m_0} 的第 j 列的所有元素都是正的。由Ⅳ. 定理 1 及Ⅱ. 定理 14 知相应的状态 j 是常返的。而且 P^{m_0+1} 的第 j 列的所有元素也必是正的，所以状态 j 是非周期的，令 $C(j)$ 记由状态 j 生成的状态闭集，那么 $C(j)$ 相当于一个具有 N 个或更少状态的不可分非周期马氏链的状态空间。由引理 6 知存在正整数 $l\leqslant N-1$ 使得 $p_{jj}^{(l)}>0$。为了记法上的方便不妨假定 $j=1$。又以 $\bar{P}=[\bar{p}_{ij}]$ 记随机矩阵 $P^l=[p_{ij}^{(l)}]$，那么 $\bar{p}_{11}>0$。用 $\bar{P}$ 作为新的转移概率矩阵，则对所有的 $i\in S$ 都有 $\bar{p}_{i1}{}^{(N-1)}>0$，即因 P^{m_0} 的第 j 列的所有元素 $p_{ij}^{(m_0)}>0, i\in S$ 以及Ⅱ. 定理 15 之推论知所有的常返状态是与状态 $j=1$ 互通的，而且 P 是非周期的。在使用转移矩阵 $\bar{P}=P^l$ 下，从任何状态出发必能达到状态 1。再由引理 3，对每个 $i\in S$，$i\neq 1$，必存在正整数 $n_i\leqslant N-1$ 使得 $\bar{p}_{i1}{}^{(n_i)}>0$，此刻便有

$$\bar{p}_{i1}{}^{(N-1)}\geqslant \bar{p}_{i1}{}^{(n_i)}\bar{p}_{11}{}^{(N-1-n_i)}>0, \qquad i\neq 1, \tag{44}$$

又因 $\bar{p}_{11}>0$，显然 $\bar{p}_{11}{}^{(N-1)}>0$。综上所述知 $\bar{P}^{N-1}=P^{l(N-1)}$ 的第一列中每个元素都是正的。于是应用引理 5 及 $P^{(N-1-l)(N-1)}$ 是随机矩阵，可知

$$P^{(N-1)^2}=P^{(N-1-l)(N-1)}P^{l(N-1)} \tag{45}$$

的第一列所有元素都是正的。必要性得证。充分性是显明的。引理证完。

注 1　上面的论证能被用来证明：如果 P 是一个 $N\times N$ 随机矩阵，那么 P 的某次幂无一零元素的充要条件是 $P^{N(N-1)}$ 无一零元素，比此结果更好的结果是：P 的某次幂无一零元素的充要条件是 P^{N^2-2N+2} 无一零元素。

注 2　$N\times N$ 随机矩阵 P 具有一列无一零元素的充要条件是 P^{N^2-3N+3} 具有一列无一零元素。这也是这类结论中最好的结果。所谓“最好”是指没有比 N^2-3N+3 更小的幂次可

使上述的结论仍然成立。鉴于此结果，便可给出列和法的改进形式，即用 N^2-3N+3 替代上界 $(N-1)^2$。

令 L 是 Z 的这样的幂次，即对 Z^L 或 $Z(L)$ 用列和法已确定了相应的马氏链是遍历的。回忆列和法所取的 Z 的高次幂是直到 $Z(L)$ 的某些列和为 N 或 $N-1$，并且 $\alpha(Z(L))>0$，或者直到 $L\geqslant(N-1)^2$。由引理 7 看出：如果 Z 对应于一个遍历的马氏链，那么列和方法保证了在使 $\alpha(Z(L))>0$ 的 $Z(L)$ 中有一列其列和至少为 $N-1$。如果 $Z(L)$ 的一列和为 N，则对应于此列的状态一定是常返的。下一个引理将证明：如果 $Z(L)$ 中没有一列的列和为 N，但是 $\alpha(Z(L))>0$，并且有一列和为 $N-1$，则对应于此列的状态必是常返的。

引理 8 设 P 是有限齐次马氏链 X 的 $N\times N$ 转移概率矩阵，如果 $Z(L)$ 的第 i 列之列和为 $N-1$。而且没有一列之列和为 N，又 $\alpha(Z(L))>0$，则状态 i 是常返的。

证 假定 $Z(L)$ 的第 i 列中第 j 行元素为零，其它行的元素皆为 1，那么除状态 j 之外，从其它状态出发肯定可以达到状态 i，所以状态 i 若是非常返的，那么状态 j 只能是吸收的，因为如果 j 不是吸收的，则有 $j\to i'(i'\neq j)\to i$，这样从任何状态出发都可达到状态 i，于是由 Ⅳ. 定理 1 及 Ⅱ. 定理 14 知 i 必为常返的。然而如果 j 是吸收状态也将导致矛盾。因为这时 $Z(L)$ 的第 j 行中除了第 j 列的元素 $z_{jj}(L)=1$ 之外，其它所有元素皆为零。如果第 j 列中第 k 行的元素 $z_{kj}(L)=0$，那么

$$\sum_{r=1}^{N}\min(z_{kr}(L),z_{jr}(L))=0, \tag{46}$$

从而 $\alpha(Z(L))=0$，这与引理的假设矛盾。另一方面，倘若第 j 列中每一行的元素皆为 1，那么第 j 列的列和为 N，这还是和引理的假设矛盾。因此 j 不可能是吸收的，故 i 不可能是非常返的，i 必定是常返状态。引理证完。

由于引理 8 当遍历性已被确定时列和方法总能产生出一个常返状态。所以前面已提出的求解方程组 $\pi P=\pi$，$\sum_{i=1}^{N}\pi_i=1$ 的第二种方法是能被采用的。即将对应于常返状态 i 的 π_i 置为 1，消除 $\pi P=\pi$ 的 N 个方程中的任何一个。结果所得的含 $N-1$ 个未知数 $N-1$ 个方程的方程组有唯一解。记作 $\pi^*=[\pi_1^*,\cdots,\pi_{i-1}^*,\pi_{i+1}^*\cdots,\pi_N^*]$。令 $\pi^{**}=[\pi_1^{**},\cdots,\pi_N^{**}]$ 为

$$\pi_j^{**}=\begin{cases}\pi_j^*, & 当\ j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,N,\\ 1, & 当\ j=i,\end{cases} \tag{47}$$

再将向量 π^{**} 的长度减缩到一个单位就得到所要求的 $\pi=[\pi_1,\cdots,\pi_N]$，$\pi_j=\pi_j^{**}/\sum_{i=1}^{N}\pi_i^{**}$，$j=1,\cdots,N$。当然求解含 $N-1$ 个未知数 $N-1$ 个方程的方程组比求解含 N 个未知数 N 个方程的方程组容易。如果用来确定遍历性所采取的某种方法不是列和法，那么要决定出一个常返状态也许不是那么容易的，在这种情况下可采用第一种方法求解方程组 $\pi P=\pi$，$\sum_{i=1}^{N}\pi_i=1$。

对遍历的随机矩阵要考虑的最后一个问题是从非常返状态出发的平均吸收时间。一旦确定了非常返状态集，那么采用的办法是与对非遍历矩阵所做的方法一样。第一眼就可看出这是一个容易的问题，即非常返状态是在平稳分布中使 $\pi_i=0$ 的那样一些状态 $i(\in S)$。除了在计算机中有可能出现的舍入误差的问题之外，前面的这一断言是准确可靠的。即由计算机给出的 π_i 的值可以是实质上应为零但又不是精确地为零。所以说状态 i 是非常返的充

要条件为 $\pi_i=0$ 可能带有某些误差。对此可采取各种保证措施附加到这个方法上，可是每种保证措施都会增加分析的时间。

寻求非常返状态还有第二种十分简明的方法。令人遗憾地是这种方法通常比简单地观察平稳分布的方法慢。如果对于 $2^M>N(N-1)$ 已计算 $Z(2^M)$，可以证明一个状态是常返的充要条件是 $Z(2^M)$ 中对应于此状态的列和为 N（其实只要对 $2^M>N^2-2N+2$ 就足够了）。不幸地是列和法通常早在 $2^M\geqslant N(N-1)$ 之前就已确定此矩阵是遍历的，并且仅提供出一个常返状态而不是所有的常返状态。所以如果要使用寻求所有常返状态的方法，将不采用列和法。在这情况下 Z^{2^M} 的幂次将直接取到 $2^M\geqslant N(N-1)$，然后计算 $\alpha(Z(2^M))$，最后给出分析。

图 2 的流程图阐述了分析有限马氏链的算法步骤。

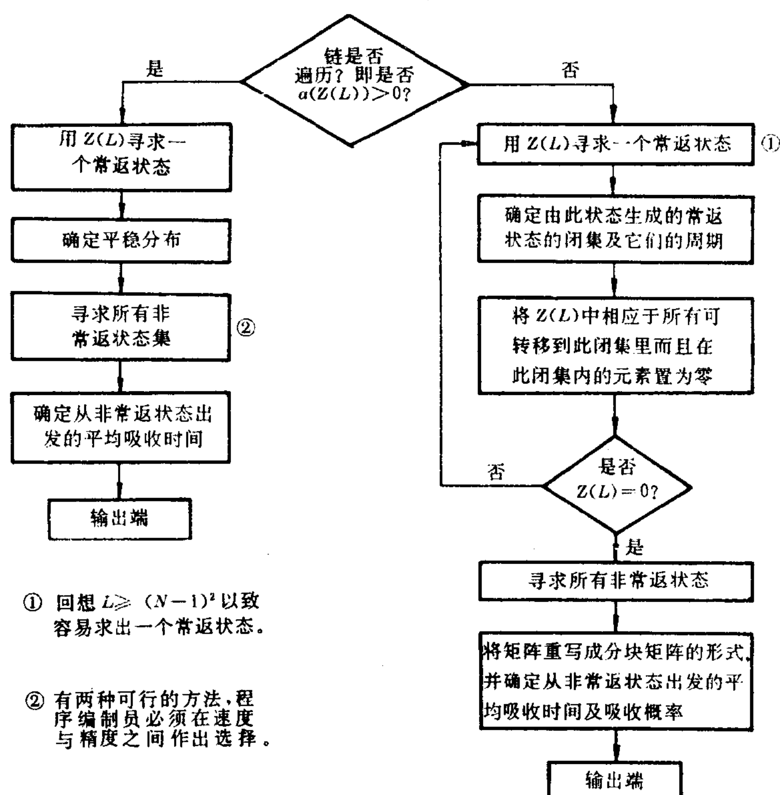


图 2　分析有限马氏链的流程图

§3　大马尔科夫链与可列马尔科夫链的分析

1. 不可分大马尔科夫链的平稳分布

为了寻求状态个数有限但又很多的大马尔科夫链的平稳分布，在第四章的 §3 中，对单一输入超状态可分解的马尔科夫链的平稳分布已给出了具体的算法及其理论依据 Ⅳ. 定理 19。进而要计算一般的不可分大马尔科夫链的平稳分布，根据 Ⅳ. 定理 20 也能给出一种可行的算法，现在介绍如下。本段中采用与 Ⅳ. §3 中完全相同的记号。

回忆Ⅳ．式(104)、(105)、(106)，Ⅳ．定理 20 已指出：如果已知矩阵 A、B 和 C，就能利用Ⅳ．§3所给出的算法求出 $\bar{\pi}$，从而确定出平稳分布 π。这里 A 和 B 仅仅依赖于转移概率矩阵 P 并能容易地算得，但是矩阵 C 有赖于 π，这种情况启示我们提出一种迭代算法，即先推测估计出一个 π，由它计算 C，然后由此解出一个 π 的新的修正值。所提供的这种算法的每次迭代都确定出描述被扩大了的马尔科夫系统的 $\bar{P}$ 的平稳分布 $\bar{\pi}$，即每次迭代确定出来的 $\bar{\pi}$ 都满足：

$$\bar{P}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix},\qquad \bar{\pi}\,\bar{P}=\bar{\pi},\qquad \sum_{i=1}^{N+m}\bar{\pi}_i=1。\tag{48}$$

令

$$\omega=a\bar{\pi},\qquad a^{-1}=\sum_{i=1}^{N}\bar{\pi}_i,\tag{49}$$

于是由式(48)、(49)知 ω 必满足方程：

$$\omega\bar{P}=\omega,\qquad \sum_{i=1}^{N}\omega_i=1。\tag{50}$$

消去 $\omega\bar{P}=\omega$ 中的一个多余的方程并附加上方程 $\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_i=1$，便可看出每次迭代所确定的 ω 由下式给出：

$$\omega=[0,0,\cdots,0,1]\begin{bmatrix}A-I & H\\ C & -I^*\end{bmatrix}^{-1},\tag{51}$$

在表达式(51)中，H 与 I^* 是由下面的式(55)，(56)分别依次给定的矩阵，即除去 H 的最后一列的元素皆为 1 之外，其它的元素与 B 对应相同，又除去 I^* 的最后一列的元素皆为零之外，其它的元素与单位矩阵对应相同。

应用分块矩阵的逆矩阵公式：

$$\begin{bmatrix}U & V\\ W & Y\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}U^{-1}+U^{-1}V\Delta^{-1}WU^{-1} & -U^{-1}V\Delta^{-1}\\ -\Delta^{-1}WU^{-1} & \Delta^{-1}\end{bmatrix},\tag{52}$$

其中 $\Delta=Y-WU^{-1}V$。由式(51)可知：$(C(I-A)^{-1}H-I^*)^{-1}C(I-A)^{-1}$ 的最后一行便是 ω 中的头 N 个元素 $[\omega_1,\cdots,\omega_N]$。由 $\bar{P}$ 的结构形式知不存在来自单一输入状态的相互超状态转移。因此仅用 ω 的头 N 个分量值就能修正 C_{ij} 的值(注意到在计算 C_{ij} 时，因为常数 a 约去了，所以可用 ω 而不是用 $\bar{\pi}$)。所以在每次迭代时，只要计算 ω 的头 N 个元素，并且规定初始的近似估值 $\hat{\pi}$ 只是 ω 的这头 N 个元素。有了上面的论述，便可给出下面的算法：

① 选择初始的 $\hat{\pi}$ 作为 P 的平稳分布的近似推测估计。

② 确定超状态的个数 $m(m\leqslant N)$。为了获取高效，m 应取为约近于 $\sqrt{N}$。将状态空间中的 N 个状态划分成 m 个超状态，并且对每个超状态添加入一个人为的输入状态。又将这些超状态标记为 S_1，S_2，…，S_m。

③ 定义 $N\times N$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 与 $N\times m$ 矩阵 $B=[b_{ij}]$ 如下：对 i，$j\in\{1,\cdots,N\}$，

$$a_{ij}=\begin{cases}p_{ij}, & \text{如果 } i \text{ 与 } j \text{ 属于同一个超状态},\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}\tag{53}$$

对 $i\in\{1,\cdots,N\}$，$j\in\{1,\cdots,m\}$，

$$b_{ij}=\begin{cases}0\quad, & \text{如果 } i\in S_j,\\ \sum\limits_{r\in S_j}p_{ir}, & \text{如果 } i\notin S_j。\end{cases}\tag{54}$$

④　应用 B 构造 $N\times m$ 矩阵 $H=[h_{ij}]$如下：对 $i\in\{1,\cdots,N\}$，$j\in\{1,\cdots,m\}$，

$$h_{ij}=\begin{cases}b_{ij}, & \text{如果 } j<m,\\ 1, & \text{如果 } j=m。\end{cases} \tag{55}$$

又构造 $m\times m$ 矩阵 $I^*=[I^*_{ij}]$如下：对 $i,j\in\{1,\cdots,m\}$，

$$I^*_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果 } i=j<m,\\ 0, & \text{其它(包括 } I^*_{mm}=0)。\end{cases} \tag{56}$$

计算矩阵 $D=(I-A)^{-1}$及 $E=DH$。

⑤　构造 $m\times N$ 矩阵 $C=[c_{ij}]$如下：对于 $i\in\{1,\ \cdots,\ m\}$，$j\in\{1,\ \cdots,\ N\}$，

$$C_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{l\in S_i}\hat{\pi}_l p_{lj}\Big/\sum\limits_{r\in S_i}\sum\limits_{l\in S_i}\hat{\pi}_l p_{lr}, & \text{如果 } j\in S_i,\\ 0, & \text{如果 } j\notin S_i。\end{cases} \tag{57}$$

⑥　计算 $\Delta=CE-I^*$

⑦　求出 Δ^{-1}的最后一行，记为 F。等价地即解 $F\Delta=[0,0,\cdots,0,1]\in R^m$。

⑧　赋予 $\hat{\pi}$ 以新的值 FCD，以此来校正原先的 $\hat{\pi}$。如果新的 $\hat{\pi}$ 已足以接近前一个 $\hat{\pi}$，则停止计算，这时的 $\hat{\pi}$ 即作为 P 的平稳分布，否则转回第⑤步。

注意到一般计算 $D=(I-A)^{-1}$是较困难的。然而因为 $\overline{P}$ 是单一输入超状态可分解马氏链的转移矩阵，A 是分块对角矩阵，这就大大简化了计算。

从许多马尔科夫系统的具体结果[24]中，已呈现出上述算法具有快速的收敛性。但是至今还未能从理论上表征该算法的收敛性质，有待深入地探讨。当然继续去创造计算大马氏链的平稳分布的新算法无疑仍是一个重要的论题[35]，进而便是编制适用于计算机的程序，对此本书不再展开讨论。

2. 可列马尔科夫链的转移概率矩阵的分析

在前两节中，为了借助于计算机来分析有限齐次马氏链，建立了一系列的引理和定理作为提供有效算法的理论根据。当状态空间从有限放宽到可列无限的一般情形时，以前建立的重要结论是否仍保持成立？这就是本段的中心论题。

首先通过一些例子说明对有限随机矩阵是真的论断对于可列无限随机矩阵却可以是不真的。

例 6　如果 P'是一有限随机矩阵，P'有一列其所有的元素都是非零正值，则由遍历系数 $\alpha(P')$的定义Ⅴ．式(5)知 $\alpha(P')>0$。但是对可列无限随机矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & \cdots\\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & \cdots\\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}, \tag{58}$$

P 的第一列中每个元素都大于零，而且

$$\alpha(P)=\inf_{i,j\geq 1}\sum_{k=1}^{\infty}\min\ (p_{ik},p_{jk})=\inf\ \{1/2,1/3,1/4,\cdots\}=0。$$

例 7 设 P' 是一有限齐次马氏链的转移概率矩阵，由Ⅳ. 定理 7 知 P' 必有平稳分布。又设一可列齐次马氏链的转移概率矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{59}$$

明显地此链的所有状态都是非常返的，而且对任何状态 i，j 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$。由Ⅱ. 定理 11 之推论知此 P 不存在平稳分布。

例 8 设 P' 是一有限随机矩阵，P' 具有一列其每个元素都是非零正值，由Ⅳ. 定理 9 之推论 2 知 P 是遍历的，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k}\sup_{i,j}\left|p_{ik}^{(n)}-p_{jk}^{(n)}\right|=0。\tag{60}$$

然而对于可列无限的随机矩阵此结论未必成立。设 P 是如下式所给的可列无限随机矩阵：

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/8 & 0 & 0 & 7/8 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/16 & 0 & 0 & 0 & 15/16 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{61}$$

容易验算对任何正整数 n 都有

$$p_{1,n+2}^{(n)}=0，p_{2,n+2}^{(n)}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}\times\cdots\cdots\times\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}=\prod_{m=2}^{n+1}(1-2^{-m})$$

又根据无穷乘积理论以及 $\sum\limits_{m=2}^{\infty}2^{-m}<\infty$ 可得 $\prod\limits_{m=2}^{\infty}(1-2^{-m})=a>0$。于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k}\sup_{i,j}\left|p_{ik}^{(n)}-p_{jk}^{(n)}\right|\geqslant\lim_{n\to\infty}\left|p_{2,n+2}^{(n)}-p_{1,n+2}^{(n)}\right|=a>0$$

式(60)不成立。

其次将给出的一些例子，表明某些对有限随机矩阵成立的论断对于可列无限随机矩阵的类似论断显然成立，而且证明是平凡的。

例 9 设 P' 是一有限齐次马氏链的转移概率矩阵，若有正整数 m 使 P'^m 的第 j 列没有一个零元素，由 C-K 方程易知 P'^{m+1} 的第 j 列也没有一个零元素。由此可知状态 j 是非周期的。完全类似地，如果 P 是一可列齐次马氏链的转移概率矩阵，对 P 此结论仍然成立。

例 10 假定 $P'=[p'_{ij}]$ 是一有限齐次马氏链的转移概率矩阵，若状态 i 与 j 有公共的 m 阶后继状态 k，那么 i 与 j 必有公共的 $m+1$ 阶后继状态。事实上因为至少存在有一个状态 r 使得 $p'_{kr}>0$，于是有 $p'^{(m+1)}_{ir}\geqslant p'^{(m)}_{ik}p'_{kr}>0$，$p'^{(m+1)}_{jr}\geqslant p'^{(m)}_{jk}p'_{kr}>0$，此 r 即为所求证的状态。显然完全类似地对于可列齐次马氏链的转移概率矩阵 P 此结论仍然保持成立。

最后再举例阐明：对有限随机矩阵成立的某些论断推广到可列无限随机矩阵的情形时，尽管仍然成立但是并不明显，而且证明也是非平凡的。

例 11　设 P 是一有限齐次遍历马氏链的转移概率矩阵，则由Ⅳ. 定理 9 之推论 2 知：P 的某有限次幂具有一列无一零元素。而且由引理 7 知所要求的这一幂次是由 P 的大小所决定。下面的定理证实了类似于上述的结果，对于可列随机矩阵 P 仍成立。而且这一幂次可由使 $\alpha(P^l)\geqslant\varepsilon>0$ 的 l 与 ε 所决定。

定理 5　设 P 是一可列无限随机矩阵，而且有正整数 l 使得 $\alpha(P^l)>0$，那么必存在 P 的某次幂，它具有一列无一零元素。

证　记 $\varepsilon=\alpha(P^l)>0$。选取 n 使得 $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}p_{ij}^{(l)}\leqslant\varepsilon/2$，那么在 P^l 的每一行的头 n 列中必定至少有一个正值元素。因为如果不是这样，即 P^l 的头 n 列中的所有元素皆为零，于是由 $\alpha(P^l)$ 的定义

$$\alpha(P^l)=\inf_{i,j}\sum_{k=1}^{\infty}\min(p_{ik}^{(l)},p_{jk}^{(l)}),\tag{62}$$

以及 $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}p_{ij}^{(l)}\leqslant\varepsilon/2$ 便知 $\alpha(P^l)\leqslant\varepsilon/2$，这与假定 $\varepsilon=\alpha(P^l)>0$ 矛盾。

现用 U 记 P^l 中的左上角 $n\times n$ 非负矩阵。因为已知 $\alpha(P^l)>0$，仍由定义式(62)推知，每对状态必有 l 阶公共后继状态。特别地在状态子集$\{1,\cdots,n\}$中的所有状态对都有 l 阶公共后继状态。下面将要证明这些状态对，事实上具有在状态集$\{1,\cdots,n\}$中的某阶公共后继状态。能够证明在$\{1,\cdots,n\}$中的每对状态都有在$\{1,\cdots,n\}$中的阶为 $2l$ 的公共后继状态。以 U^* 记 P^{2l} 中的左上角 $n\times n$ 矩阵，可证 U^* 的某次幂具有一列无一零元素[13]。特别地由引理 7 知 $U^{*(n-1)^2}$ 有一列譬如是第 j_0 列无一零元素，那么从 U^* 的定义得知 $P^{2l(n-1)^2}$ 的第 j_0 列头 n 行上的元素都是非零正值的($1\leqslant j_0\leqslant n$)。最后，因为 P^l 的头 n 列中每一行都有一个正值元素，所以 $P^lP^{2l(n-1)^2}=P^{l+2l(n-1)^2}$ 的第 j_0 列中每个元素都是非零正值，定理证完。

注　在上面定理的证明中，因为 $U^{*(n-1)^2}$ 的第 j_0 列无一零元素，所以 $\xi=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}p_{ij_0}^{2l(n-1)^2}>0$，即 ξ 是严格正的，由此方法 n 也可选择成使得对 P^l 的所有行 $\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}^{(l)}\geqslant\varepsilon/2$。所以 $P^{l+2l(n-1)^2}$ 的第 j_0 列的每个元素至少要与 $\xi\cdot\varepsilon/2(>0)$ 一样大，换言之，$P^{l+2l(n-1)^2}$ 的第 j_0 列的元素不仅都是正的，而且它们是有严格非零正下界。其实能够直接证明如下事实：设 P 是一可列(或有限)齐次马氏链的转移概率矩阵。定义向量 $q=(q_1,\ q_2,\ \cdots)$(或 $q=(q_1,\ \cdots,\ q_N)$)的范数为

$$\|q\|=\sum_{i=1}^{\infty}|q_i|,\left(\text{或 }\|q\|=\sum_{i=1}^{N}|q_i|\right)\tag{63}$$

又以 $q^{(0)}$、$r^{(0)}$ 表示初始概率分布，如果有

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{q^{(0)},r^{(0)}}\|q^{(0)}P^m-r^{(0)}P^m\|=0,\tag{64}$$

则 P 的某有限次幂具有一列它的所有元素有严格非零正下界。

例 12　如果 P 是一有限随机矩阵，P 满足式(64)，则 P 有唯一的平稳分布。下面的定理指出：当 P 是一可列无限随机矩阵并满足式(64)时，同样的结果仍成立。但要强调的是，此结果不是对任何可列随机矩阵都能成立的，这里式(64)是决定性的条件。

定理 6　如果 P 是满足式(64)的可列无限随机矩阵，则 P 有唯一的平稳分布。

证　因为 P 满足式(64)，P 恰有一个闭的常返状态子集，所以平稳分布的存在性问题化为这常返子集是否为零常返的问题。

由定理5之注，每当 $M \geqslant l+2l(n-1)^2$ 并且 $\alpha(P^l)=\varepsilon$ 时，在 P^M 的第 j_0 列中的所有元素将下方有界 $\xi \cdot \varepsilon/2$。因此状态 j_0 是正常返的，所以相应于 P 的一个常返状态子集必须是正常返的，从而必存在平稳分布，还可证明这是唯一的。

总之，上面的例子阐明，对有限随机矩阵成立的结果试图推广到一般可列无限随机矩阵时，可能出现的各种不同的情形，以此来提醒读者不要随便轻信必须慎重对待。

第八章　连续参数的马尔科夫链

相对于前面各章关于离散参数马氏链的讨论，本章将对连续参数马氏链的基本概念，独自具有的特性，以及若干重要的具体特例作一简要的介绍。

§1　基本的概念与性质

设 $X=\{X_t, t\in T\}$ 是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一族随机变量，这里 T 是连续时间参数 t 所有可能取值的全体即参数集，譬如 T 可取为$(-\infty,+\infty)$或 $[0,+\infty)$，在本章中若无特别声明 T 都取作$[0,+\infty)$。X 所有可能取值之集合 S 为 X 的状态空间，本章中 S 是一可数集合，总取 S 为 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 或 $\{1, \cdots, N\}$。若对任意的正整数 $n\geqslant 1$，任意的非负实数 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}$，以及任意的 $i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1}\in S$，使 $P(X_{t_1}=i_1, X_{t_2}=i_2, \cdots, X_{t_n}=i_n)>0$，并总有

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_1}=i_1, X_{t_2}=i_2, \cdots, X_{t_n}=i_n)$$
$$=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n) \tag{1}$$

则称此 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 为**连续参数的马氏链**，式 (1) 所表示的即为**马氏性**。类似于离散参数的情形，这里马氏性也有多种等价形式。

定理 1　下列诸条件等价：

(i)　马氏性式 (1) 成立。

(ii)　对任意的正整数 $n\geqslant 1$，任意的非负实数 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n$，以及任意的 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i_n\in S$，有

$$P(X_{t_0}=i_0, X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_{n-1}}=i_{n-1}, X_{t_n}=i_n)$$
$$=P(X_{t_0}=i_0)P(X_{t_1}=i_1|X_{t_0}=i_0)\cdots P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}), \tag{2}$$

当然这里要求 $P(X_{t_0}=i_0, X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_{n-1}}=i_{n-1})>0$ 以保证式 (2) 右方有意义。

(iii)　对任意的 $t\geqslant 0$，$i\in S$，任意的 $A\in\mathscr{F}(X_u, u\geqslant t)$，$B\in\mathscr{F}(X_u, 0\leqslant u\leqslant t)$，使 $P(B, X_t=i)>0$，并有

$$P(A|B, X_t=i)=P(A|X_t=i)。\tag{3}$$

(iv)　对任意的 $t\geqslant 0$，$i\in S$，任意的 $A\in\mathscr{F}(X_u, u\geqslant t)$，$B\in\mathscr{F}(X_u, 0\leqslant u\leqslant t)$，使 $P(X_t=i)>0$，并有

$$P(AB|X_t=i)=P(A|X_t=i)P(B|X_t=i)。\tag{4}$$

(v)　对任意的正整数 $n>1$，任意的非负实数 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$，以及任意的 $i\in S$，有

$$P(X_{t_n}=i|X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots X_{t_{n-1}})=P(X_{t_n}=i|X_{t_{n-1}}),\quad a.s. \tag{5}$$

(vi) 对任意的 $t\geqslant 0$，任给满足下列条件的随机变量 Y：$E|Y|<\infty$，并对任何实数 a 都有 $\{Y\leqslant a\}\in\mathscr{F}(X_u,\ u\geqslant t)$，则有

$$E(Y|\mathscr{F}(X_u,\ 0\leqslant u\leqslant t))=E(Y|X_t),\quad a.s. \tag{6}$$

定理 1 的证明省略，定理 1 的详细论述与推导可参看文献 [2]。

研究连续参数马氏链的主要问题仍然是描述和探讨它的状态转移的统计规律与性质。为此，对任何 $0\leqslant s<t$，i，$j\in S$，如果 $P(X_s=i)>0$，记

$$p_{ij}(s,t)\triangleq P(X_t=j|X_s=i), \tag{7}$$

称 $p_{ij}(s,t)$为 X 在 s 时处于状态 i 的条件下，t 时转移到状态 j 的**转移概率**，以 $p_{ij}(s,t)$为元素，对状态 i，$j\in S$ 依序排成的矩阵 $P(s,t)=[p_{ij}(s,t)]$ 称为 X 的 (s,t) **转移矩阵**，当 s，t 取遍 $[0,\infty)$ 中之值，而且 $s\leqslant t$ 时，便得 X 的转移矩阵族 $\{P(s,t),\ 0\leqslant s\leqslant t\}$。由定义式 (7)，概率的性质，以及 X 具有马氏性式 (1)，即得下面的定理：

定理 2 连续参数马氏链 X 的转移矩阵族 $\{P(s,t),\ 0\leqslant s\leqslant t\}$ 具有如下的性质：

(i) $0\leqslant p_{ij}(s,t)\leqslant 1,\quad i,j\in S,\quad 0\leqslant s\leqslant t$。 (8)

(ii) $\sum\limits_{j\in S}p_{ij}(s,t)=1,\quad i\in S,\quad 0\leqslant s\leqslant t$。 (9)

(iii) 对任何 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u$，任何 i，$j\in S$，有

$$p_{ij}(s,u)=\sum_{k\in S}p_{ik}(s,t)p_{kj}(t,u) \tag{10}$$

或

$$P(s,u)=P(s,t)P(t,u) \tag{11}$$

(iv) $$p_{ij}(s,s)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad j\in S,\quad s\geqslant 0 \tag{12}$$

通常称式(10)或 (11) 为**切普曼-柯尔莫哥洛夫方程(C-K 方程)**。

当连续参数马氏链 X 的转移概率 $p_{ij}(s,t)$，i，$j\in S$，$0\leqslant s\leqslant t$ 只与 $t-s$ 有关，而与 s 具体取何值无关时，即 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t-s)$，i，$j\in S$，$0\leqslant s\leqslant t$，则称此 X 或它的转移矩阵族是**齐次的**，确切地说是**时间齐次的**。如果 $p_{ij}(s,t)$，i，$j\in S$，$0\leqslant s\leqslant t$ 只依赖于 $j-i$，则称此 X 或它的转移矩阵族是**空间齐次的**。本章仅对连续参数的齐次马氏链展开讨论，着重论述刻画 X 状态转移规律的转移概率的分析性质。这时 X 的转移概率可写成 $p_{ij}(t)$，i，$j\in S$，$t\geqslant 0$，它作为定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负实值函数族，首先来考察它的极限、连续等分析性质。

定理 3 设 $p_{ij}(t)$，i，$j\in S$，$t\geqslant 0$ 是连续参数齐次马氏链 X 的转移概率，则下列条件等价：

(i) $$\lim_{t\to 0+}p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j\in S。 \tag{13}$$

(ii) $$\lim_{t\to 0+}p_{ii}(t)=1,\ i\in S。 \tag{14}$$

(iii) 对任给的 $\varepsilon>0$，任意的 $i\in S$，及任意的 $t\geqslant 0$，

$$\lim_{h\to 0+}P(|X_{t+h}-X_t|\geqslant\varepsilon|X_0=i)=0。 \tag{15}$$

证 因为式 (8)、(9)，对任何 $t\geqslant 0$，任何 i，$j\in S$，$i\neq j$，有

$$0\leqslant p_{ij}(t)\leqslant 1-p_{ii}(t), \tag{16}$$

由此即得(i)与(ii)等价。

现证(i)→(iii)。不妨取 $0<\varepsilon<1$，则对任何 $h>0$，由概率的可列可加性，X 的马氏性、齐次性，有

$$P(|X_{t+h}-X_t|\geqslant\varepsilon|X_0=i)=P(X_{t+h}\neq X_t|X_0=i)$$
$$=\sum_{j\in S}p_{ij}(t)\,P(X_{t+h}\neq j|X_t=j)=\sum_{j\in S}p_{ij}(t)(1-p_{jj}(h))。$$

利用勒贝格控制收敛定理及式（13）即得式（15）。

再证(iii)→(i)。仍取 $0<\varepsilon<1$，在式（15）中取 $t=0$，有

$$1-p_{ii}(h)=P(X_h\neq i|X_0=i)=P(|X_h-X_0|\geqslant\varepsilon|X_0=i),\quad i\in S,$$

于是由式（15）即得式（14），再由式（16）得式（13），证完。

定理 3 中，式（13）、（14）、（15）的直观解释是 X 在很短的时间间隔内发生状态改变的可能性是很小的，这与常见的客观事实是相符的。称条件（13）为**标准性条件**．在大多数实际问题中出现的齐次马氏链都能满足标准性条件。

定理 4　对连续参数齐次马氏链 X 的转移概率，有

$$\sum_{j\in S}|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant 2(1-p_{ii}(h)),\ i\in S,\ t\geqslant 0,\ h>0,\tag{17}$$

从而如果 X 还满足标准性条件，则对一切 i，$j\in S$，$p_{ij}(t)$是 $t\in[0,\infty)$上的一致连续函数。

证　由 C－K 方程，对任何 i，$j\in S$，$t\geqslant 0$，$h>0$，有

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)$$
$$=\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-(1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)。$$

由此可得：对任何 i，$j\in S$，$t\geqslant 0$，$h>0$，

$$-(1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)\leqslant p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\leqslant\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)\,p_{kj}(t)。\tag{18}$$

对任一实数 a 的正部及负部分别依次为 $a^+=\max(a,0)$ 及 $a^-=\max(-a,0)$，显然 $|a|=a^++a^-$。于是由式（18）可得：对任何 $i\in S$，$t\geqslant 0$，$h>0$，

$$\sum_{j\in S}(p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t))^+\leqslant\sum_{j\in S}\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$
$$=\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)=1-p_{ii}(h),\tag{19}$$

$$\sum_{j\in S}(p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t))^-\leqslant\sum_{j\in S}(1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)=1-p_{ii}(h)。\tag{20}$$

将不等式（19）与（20）相加即得式（17）。由标准性条件（13）及式（17）即得 $p_{ij}(t)$的一致右连续性。

在式（17）中，可用 $t-h(\geqslant 0)$来替换 t，得

$$\sum_{j\in S}|p_{ij}(t)-p_{ij}(t-h)|\leqslant 2(1-p_{ii}(h)),\ i\in S,\ t>0,\ h>0,\ t-h\geqslant 0,\tag{21}$$

由此便证得 $p_{ij}(t)$的一致左连续性。综上所述知 $p_{ij}(t)$是 $t\in[0,\infty)$上的一致连续函数。定理证完。

值得指出的是定理 4 揭示了连续参数齐次马氏链的一个重要事实，即链的转移概率 $p_{ij}(t)$，i，$j\in S$，$t\geqslant 0$ 作为 t 的函数在零点的右连续性就足以保证了它在 $(0,\infty)$ 上每一点处的连续性。实际上以后将会看到（参见定理 5、定理 9）转移概率 $p_{ij}(t)$作为 t 的函数在零点附近的某些性质，就可确定它在 $[0,\infty)$ 上其余各处也具有同样的性质，之所以如此，

根本的原因是具有马氏性、齐次性、满足C－K方程。

定理5 设连续参数齐次马氏链 X 的转移概率 $p_{ij}(t)$，i，$j\in S$，$t\geqslant 0$ 满足标准性条件(13)，则

(i) 对任何 $i\in S$，有 $p_{ii}(t)>0$，$t\geqslant 0$。

(ii) 对任何 i，$j\in S$，$i\neq j$，若有 $t_0>0$ 使得 $p_{ij}(t_0)>0$，那么对一切 $t\geqslant t_0$ 都有 $p_{ij}(t)>0$。

证 由C－K方程，对任意的 $u>0$，$v>0$ 有

$$p_{ii}(u+v)=\sum_{k\in S}p_{ik}(u)p_{ki}(v)\geqslant p_{ii}(u)p_{ii}(v)。\tag{22}$$

由此对任意的 $t>0$ 及任意的正整数 n，有

$$P_{ii}(t)\geqslant\left[p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\tag{23}$$

根据标准性条件 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)=1$。故只要 n 充分大，便有 $p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)>0$，从而由式(23)知 $p_{ii}(t)>0$，(i) 得证。

对任给的 i，$j\in S$，$t_0>0$，如果 $p_{ij}(t_0)>0$，那么对任何 $t>t_0$，由C－K方程及(i)得

$$p_{ij}(t)\geqslant p_{ij}(t_0)p_{jj}(t-t_0)>0,$$

定理证完。

实际上，在与定理5相同的假设条件下，对任何 i，$j\in S$，$p_{ij}(t)$ 在 $t\in(0,\infty)$ 上或恒为正，或恒为零，严格的论证可参见文献[2]。

前面讨论了齐次马氏链的转移概率 $p_{ij}(t)$，i，$j\in S$ 在 $t\to 0+$ 时的极限性质以及在 $[0,\infty)$ 上的连续性质。下面将讨论 $p_{ij}(t)$，i，$j\in S$ 在 $t\to\infty$ 时的极限性质，即探讨它的遍历性质。方法是把连续参数的情形转化为离散参数的情形，以便利用离散参数马氏链的遍历性定理及已证的结论去获得 $p_{ij}(t)$ 的遍历性质。设 $\{p_{ij}(t),\ t\geqslant 0,\ i,\ j\in S\}$ 是一齐次马氏链 $X=\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 的转移概率函数族，对任意给定的 $h>0$，显然矩阵 $P(h)=[p_{ij}(h)]$ 必是离散参数齐次马氏链 $X(h)=\{X_{nh},\ n=0,1\cdots\}$ 的一步转移概率矩阵，并且由马氏性与齐次性知 $X(h)$ 的 n 步转移概率为

$$p_{ij}^{(n)}(h)=p_{ij}(nh),\quad i,j\in S,n=1,2\cdots。$$

称 $X(h)$ 或 $[p_{ij}(h)]$ 为 X 或 $\{[p_{ij}(t)],\ t\geqslant 0\}$ 的**步长为 h 的离散骨架**。

为使讨论简便起见，假定 X 的一切状态都是**互通的**，即对任何两个状态 i，$j\in S$，总存在 t，$t'>0$，使得 $p_{ij}(t)>0$ 和 $p_{ji}(t')>0$ 都成立。

引理1 设连续参数齐次马氏链 X 的一切状态都是互通的，它的转移矩阵族满足标准性条件，对任给的 $h>0$，$X(h)$ 是 X 的步长为 h 的离散骨架，则

(i) 对 $X(h)$ 而言每个状态都是非周期的。

(ii) $X(h)$ 是不可分的。

(iii) 对任给的 $h>0$，任给的 i，$j\in S$，下列极限存在，而且与 i 无关：

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}(h)=\lim_{n\to\infty}p_{ij}(nh)=\pi_j(h)。$$

证 由定理5中(i)的结论知：对任何 $i\in S$，有 $p_{ii}(t)>0$，$t\geqslant 0$，特别地 $p_{ii}^{(n)}(h)=p_{ii}(nh)>0$，$n=1$，2，…，由此可见 i 是非周期的，(i)得证。

对任意的状态 i，$j\in S$，由互通的假定必存在某 $s>0$，使得 $p_{ij}(s)>0$。总可选到足够大

的正整数 n 使得 $nh>s$，既然前面已指出 $p_{ii}(t)$恒大于零，故

$$p_{ij}^{(n)}(h)=p_{ij}(nh)\geqslant p_{ii}(nh-s)p_{ij}(s)>0$$

即 $X(h)$的一切状态都是互通的，所以它是不可分的，(ii) 得证。

由前面已证的结论 (i)、(ii)，以及Ⅱ. 定理 1、Ⅱ. 定理 2 和Ⅱ. 定理 3 之推论即得 (iii)。引理证完。

定理 6　设连续参数齐次马氏链 X 的一切状态都是互通的，它的转移矩阵族满足标准性条件，则

(i)　存在下列极限，且与 i 无关

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j,\quad i,j\in S。\tag{24}$$

(ii)　极限 $\{\pi_j,\ j\in S\}$ 具有下列性质：

$$\pi_j\geqslant 0,\quad j\in S;\ \sum_{j\in S}\pi_j\leqslant 1;\tag{25}$$

$$\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k\,p_{kj}(t),\quad j\in S,t\geqslant 0;\tag{26}$$

如有某个状态 j 使 $\pi_j>0$，那么

$$\pi_i>0,\quad i\in S;\ \sum_{i\in S}\pi_i=1。\tag{27}$$

证　对任意给定的 $i,j\in S$ 及正数 $\varepsilon>0$，依定理 4，$p_{ij}(t)$是 $t\in[0,\infty)$ 上的一致连续函数，于是可以选取到足够小的正数 $h>0$，使得 $p_{ij}(t)$在任一长度为 h 的区间内的任何两点上差的绝对值都小于$\frac{\varepsilon}{3}$。对此 h，由引理 1 有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(nh)=\pi_j(h)$。于是必存在正整数 N，使得当 n，$n'\geqslant N$ 时，总有

$$|p_{ij}(nh)-p_{ij}(n'h)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

那么只要 t，$t'>Nh$，相应选取 n，$n'\geqslant N$，满足 $nh\leqslant t<(n+1)h$，$n'h\leqslant t'<(n'+1)h$，便有

$$\begin{aligned}|p_{ij}(t)-p_{ij}(t')|&\leqslant|p_{ij}(t)-p_{ij}(nh)|+|p_{ij}(nh)-p_{ij}(n'h)|\\&\quad+|p_{ij}(n'h)-p_{ij}(t')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

从而由极限存在的柯西 (Cauchy) 准则，极限 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)$ 存在，再根据引理 1 直接推出此极限值与 i 无关。其实，对一切 $h>0$，$\pi_j(h)$是常数 π_j。式 (24) 得证。

$\pi_j\geqslant 0$，$j\in S$ 是显然的。记 S 为 $\{1, 2, \cdots\}$，对任一正整数 N 及 $t>0$，有 $\sum\limits_{j=1}^{N}p_{ij}(t)\leqslant 1$，$i\in S$，对此式两边令 $t\to\infty$，由 (i) 得$\sum\limits_{j=1}^{N}\pi_j\leqslant 1$，再令 $N\to\infty$，就得式 (25)

$$\sum_{j\in S}\pi_j=\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j\leqslant 1。$$

又由　$p_{ij}(u+t)=\sum\limits_{k\in S}p_{ik}(u)p_{kj}(t),\ i,j\in S,u,t\geqslant 0$，

对此式两边令 $u\to\infty$，由(i)及法都定理得

$$\pi_j\geqslant\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}(t),\quad j\in S,\quad t\geqslant 0,$$

将上式对 $j\in S$ 求和，再应用傅比尼定理就有

$$\sum_{j\in S}\pi_j \geqslant \sum_{j\in S}\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}(t) = \sum_{k\in S}\pi_k\sum_{j\in S}p_{kj}(t) = \sum_{k\in S}\pi_k。$$

由此可见必须式 (26) 成立。

当 $\pi_j>0$ 时，由 (i) 即 $\pi_j(h)>0$，故 j 是 $X(h)$ 的正常返状态，由引理 1，$X(h)$ 是不可分的，每个状态都是非周期的，从而 $X(h)$ 的每个状态都是遍历的，故由 Ⅱ. 定理 3 之推论知 $\pi_i>0$，$i\in S$。再由 Ⅱ. 定理 10 知式 (27) 成立。定理证完。

注 在比定理 6 更弱的假设条件下，文献 [2] 详细论证了如下较一般的结论：

如果连续参数齐次马氏链 X 的转移矩阵族满足标准性条件，则

(i) 存在下列极限：

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t) = \pi_{ij}, \qquad i,\ j\in S, \tag{28}$$

而且极限矩阵 $\Pi=[\pi_{ij}]$ 具有下面的一系列性质：

$$\begin{cases}\pi_{ij}\geqslant 0,\quad i,j\in S;\quad \sum_{j\in S}\pi_{ij}\leqslant 1,\quad i\in S;\\ \sum_{j\in S}\pi_{ij}=1,\qquad 如果\ i\in S,\ \pi_{ii}\neq 0;\\ \pi_{ij}=\sum_{k\in S}\pi_{ik}\pi_{kj},\qquad i,j\in S;\\ \Pi = \Pi P(t) = P(t)\Pi,\ t>0。\end{cases} \tag{29}$$

(ii)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T p_{ij}(t)dt = \pi_{ij}, \qquad i,\ j\in S, \tag{30}$$

其中 π_{ij} 是由式 (28) 确定的极限。

§2 标准转移概率的可微性

我们已经看到离散参数齐次马氏链在每一步上的状态转移运动规律简单而完全地由一个（一步）转移概率矩阵所决定。但是对于连续参数齐次马氏链而言，它的状态转移是随着连续的时间进程自由地发生变化的，即不可能找到一个基本的正时间单位 $t^*(>0)$，使马氏链仅在 nt^*，$n=1, 2, \cdots$ 时刻发生状态转移。当然也就不可能由这一个转移矩阵 $P(t^*)$ 来确定出转移矩阵族 $\{P(t), t\geqslant 0\}$ 了。这样我们必然要把注意力转向马氏链的瞬时变化上。于是自然就会想到去考察 $p_{ij}(t)$ 作为 t 的函数在 $[0, +\infty)$ 上的可微性。如果还想进一步试问：是否能像离散参数齐次马氏链那样，设法找到一个矩阵，由它就能刻画决定连续参数齐次马氏链的状态转移规律？为了对此问题作出明确的回答，也需要转移概率函数 $p_{ij}(t)$，$t\geqslant 0$，i，$j\in S$ 关于 t 的可微性知识，先讨论它在 0 点的可导性。

引理 2 设 $f(t)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实值函数，并且满足条件：$\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=0$，以及

$$f(t+s)\leqslant f(t)+f(s),\quad s,t\in(0,\infty), \tag{31}$$

则存在极限（有穷或是 $+\infty$）

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t} = \sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}。 \tag{32}$$

证 对任意给定的 $t>0$，任取正数 h：$0<h<t$，则可写成 $t=n_h h+s_h$，其中 n_h 为正整数，$0\leqslant s_h<h$。利用式（31）得

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant\frac{n_h f(h)}{t}+\frac{f(s_h)}{t}=\frac{f(h)}{h}\cdots\frac{n_h h}{t}+\frac{f(s_h)}{t}。\tag{33}$$

令 $h\to0+$，那么 $S_h\to0+$，由假设条件知 $\lim\limits_{h\to0+}f(S_h)=0$，又 $\frac{n_h h}{t}=1-\frac{s_h}{t}\to1$。于是从式（33）推出

$$\begin{aligned}\frac{f(t)}{t}&\leqslant\varliminf_{h\to0+}\frac{f(h)}{h}\frac{n_h h}{t}+\varlimsup_{h\to0+}\frac{f(s_h)}{t}\\&\leqslant\varliminf_{h\to0+}\frac{f(h)}{h}\cdot\varlimsup_{h\to0+}+\frac{n_h h}{t}\\&=\varliminf_{h\to0+}\frac{f(h)}{h}。\end{aligned}$$

由 t 的任意性便有 $\sup\limits_{t>0}\frac{f(t)}{t}\leqslant\varliminf\limits_{h\to0+}\frac{f(h)}{h}$。从而得

$$\varlimsup_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}\leqslant\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}\leqslant\varliminf_{h\to0+}\frac{f(h)}{h}。$$

由此可知存在极限 $\lim\limits_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}$，且式（32）成立。证完。

定理 7 设 $p_{ij}(t)$，$t\geqslant0$，i，$j\in S$，是连续参数齐次马氏链 X 的转移概率，满足标准性条件，则对任何 $i\in S$，下列极限存在（可能为 $-\infty$），有

$$-\infty\leqslant\lim_{t\to0+}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}\leqslant0,\tag{34}$$

即 $p_{ii}(t)$在 0 点处存在右导数 $p'_{ii}(0)$记为 q_{ii}。

证 由标准性条件及定理 5 知：对任何 $i\in S$，有 $p_{ii}(t)>0$，$t\geqslant0$，故可令 $f(t)=-\log p_{ii}(t)$，$t\geqslant0$，这是非负有限值函数，且 $\lim\limits_{t\to0+}f(t)=0$。又因 C－K 方程，有

$$p_{ii}(t+s)=\sum_{j\in S}p_{ij}(t)p_{ji}(s)\geqslant p_{ii}(t)p_{ii}(s),\quad t,s\geqslant0,$$

故 $f(t+s)=-\log p_{ii}(t+s)\leqslant-\log p_{ii}(t)+(-\log p_{ii}(s))=f(t)+f(s)$，$t$，$s\geqslant0$。于是利用引理 2 便知存在极限

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{-\log p_{ii}(t)}{t}&=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}\\&=\sup_{t>0}\frac{-\log p_{ii}(t)}{t}。\end{aligned}\tag{35}$$

仍因标准性条件 $\lim\limits_{t\to0+}f(t)=\lim\limits_{t\to0+}-\log p_{ii}(t)=0$，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}&=\lim_{t\to0+}\frac{e^{-f(t)}-1}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{e^{-f(t)}-1}{f(t)}\\&=-\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=-\sup_{t>0}\frac{\log p_{ii}(t)}{t}。\end{aligned}\tag{36}$$

记 $\lim\limits_{t\to0+}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}$ 即 $p'_{ii}(0)$为 q_{ii}，显然由式（36）知 $q_{ii}\leqslant0$。式（34）得证，定理证完。

注 对任意的 $t>0$，由式（35）与（36）有

$$p_{ii}(t) = e^{-\frac{f(t)}{t}\cdot t} \geqslant e^{q_{ii}t},$$

故 $$\frac{p_{ii}(t)-1}{t} \geqslant \frac{e^{q_{ii}t}-1}{t} \geqslant q_{ii}, \quad i \in S, \quad t > 0。 \tag{37}$$

定理 8 设 $p_{ij}(t)$。$t\geqslant 0$，i，$j\in S$，是连续参数齐次马氏链 $X=\{X_t, t\geqslant 0\}$ 的转移概率，满足标准性条件，则对任何 i，$j\in S$，$i\neq j$，存在下列有穷极限

$$0 \leqslant \lim_{t\to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} < \infty。 \tag{38}$$

若记 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)}{t}$ 为 q_{ij}，则有 $q_{ij}\leqslant -q_{ii}$，$i\neq j$，而且

$$0 \leqslant \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} q_{ij} \leqslant -q_{ii}, \ i \in S \tag{39}$$

证 对任给的正数 $\varepsilon<\frac{1}{3}$，由标准性条件必存在 $\delta>0$，使得对任意给定的 i，$j\in S$，$i\neq j$ 有

$$p_{ii}(t) > 1-\varepsilon, \quad p_{jj}(t) > 1-\varepsilon, \quad 0\leqslant t\leqslant \delta。 \tag{40}$$

对 $t\in(0, \delta)$，取更小的 $h\in(0, t)$。对任何 i，j，$k\in S$ 构造函数列：

$$\begin{cases} {}_jp_{ik}(h) = p_{ik}(h), \\ {}_jP_{ik}((m+1)h) = \sum\limits_{\substack{r\in S\\ r\neq j}} {}_j p_{ir}(mh)p_{rk}(h), \quad m=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{41}$$

其中 ${}_jp_{ik}((m+1)h$ 是 X 自状态 i 出发，于 h，$2h$，$\cdots$，mh 时都不处于状态 j，而于 $(m+1)h$ 时处在状态 k 的条件概率，即

$${}_jp_{ik}((m+1)h) = P(X_{lh}\neq j, l=1,\cdots,m, X_{(m+1)h}=k \mid X_0=i),$$

利用概率的运算性质及 X 的马氏性与齐次性，有

$$p_{ik}(mh) = \sum_{l=1}^{m-1} {}_jp_{ij}(lh)p_{jk}((m-l)h) + {}_jp_{ik}(mh)。 \tag{42}$$

现在取正整数 n_k 为不超过 $\frac{t}{h}$ 的最大整数，即 $n_kh\leqslant t<(n_k+1)h$。在式(42)中，取 $k=j$，$m=n_k$ 可得

$$p_{ij}(n_kh) = \sum_{l=1}^{n_k} {}_jp_{ij}(lh)p_{jj}((n_k-l)h) \tag{43}$$

显然有

$${}_jp_{ij}(lh) \geqslant {}_jp_{ii}((l-1)h)p_{ij}(h), \tag{44}$$

由式(43)、式(44)、式(40)得

$$\begin{aligned} p_{ij}(n_kh) &\geqslant \sum_{l=1}^{n_k} {}_jp_{ii}((l-1)h)p_{ij}(h)p_{jj}((n_k-l)h) \\ &\geqslant \sum_{l=1}^{n_k} {}_jp_{ii}((l-1)h)p_{ij}(h)(1-\varepsilon)。 \end{aligned} \tag{45}$$

再由式(43)及式(40)得

$$\varepsilon > p_{ij}(n_kh) \geqslant \sum_{l=1}^{n_k} {}_jp_{ij}(lh)(1-\varepsilon),$$

或 $$\sum_{l=1}^{n_k} {}_jp_{ij}(lh) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}。 \tag{46}$$

现在式(42)中令 $k=i$，取 $m\leqslant n_k$，利用式(40)与式(46)得

$$1-\varepsilon<p_{ii}(mh)\leqslant\sum_{l=1}^{m-1}{}_jp_{ij}(lh)+{}_jp_{ii}(mh)$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+{}_jp_{ii}(mh)。$$

从而
$$_jp_{ii}(mh)>\frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}。\tag{47}$$

将式(47)代入式(45)中有

$$p_{ij}(n_kh)\geqslant n_k(1-3\varepsilon)p_{ij}(h),$$

或
$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\ \frac{p_{ij}(n_kh)}{n_kh}\geqslant\frac{p_{ij}(h)}{h}\tag{48}$$

当 $h\to0+$ 时，显然 $n_kh\to t$，因定理4及标准性条件，$p_{ij}(t)$是 t 的连续函数，于是从式(48)得

$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\ \frac{p_{ij}(t)}{t}=\frac{1}{1-3\varepsilon}\overline{\lim_{h\to0+}}\ \frac{p_{ij}(n_kh)}{n_kh}\geqslant\overline{\lim_{h\to0+}}\ \frac{p_{ij}(h)}{h},\tag{49}$$

由 t 的任意性从式(49)可得

$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\ \underline{\lim_{t\to0+}}\ \frac{p_{ij}(t)}{t}\geqslant\overline{\lim_{h\to0+}}\ \frac{p_{ij}(h)}{h},\tag{50}$$

在式(50)中，令 $\varepsilon\to0+$，便知 $\underline{\lim\limits_{t\to0+}}\ \frac{p_{ij}(t)}{t}\geqslant\overline{\lim\limits_{h\to0+}}\ \frac{p_{ij}(h)}{h}$，这就表示存在极限 $\lim\limits_{t\to0+}\frac{p_{ij}(t)}{t}$，显然它是非负的，记作 $q_{ij}\geqslant0$。注意到式(49)的左方是一有限值，因此断定 $q_{ij}<\infty$。

对等式 $\sum\limits_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}\frac{p_{ij}(t)}{t}=\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=-\frac{p_{ii}(t)-1}{t}$，令 $t\to0+$，利用上面已证的结果及法都定理与定理7便有

$$\sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}q_{ij}=\sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}\lim_{t\to0+}\frac{p_{ij}(t)}{t}\leqslant\lim_{t\to0+}\left(-\frac{p_{ii}(t)-1}{t}\right)=-q_{ii},$$

式(39)得证，既然 $q_{ij}\geqslant0$，$j\neq i$，由上式即得 $q_{ij}\leqslant-q_{ii}$，$j\neq i$，定理证完。

定理7与定理8表明连续参数齐次马氏链 X 的转移概率函数 $p_{ij}(t)$，$t\geqslant0$，i，$j\in S$，在 $t=0$处有右导数 $p_{ij}'(0)=q_{ij}$，i，$j\in S$。称矩阵 $Q=[q_{ij}]$为 X 或$\{P(t),t\geqslant0\}$的**密度矩阵**(或**无穷小矩阵**)。在此有必要指出 q_{ij}，i，$j\in S$ 的重要意义。

(i)　显然 Q 仅由 $P(t)$在无论多么短的时间间隔 $t\in[0,\varepsilon)$中的值所完全确定，所以在实际问题中 Q 往往比$\{P(t),t\geqslant0\}$更容易得到。而且更有意义的是当这个密度矩阵 Q 已知时，有时可以反过来由 Q 求出转移矩阵族$\{P(t),t\geqslant0\}$、绝对概率与平稳分布。参看§3中的论述。

(ii)　在文献[2]中已证明：对实际问题中常见的齐次马氏链 $X=\{X_t,t\geqslant0\}$，令 $\tau=\inf\{t:t>0,X_t\neq X_0\}$，则对任何 $t>0$，任何 $i\in S$ 有

$$P(\tau>t|X_0=i)=P(X_s=i,0\leqslant s\leqslant t|X_0=i)=e^{q_{ii}t}\tag{51}$$

如果 $q_{ii}=0$，由式(51)，这等价于 $p_{ii}(t)=1$，$t\geqslant0$。即表明系统从状态 i 出发将永远保持在状态 i 上而不离开。故称此 i 为**吸收状态**。

如果 $q_{ii}=-\infty$，由式(51)有 $p_{ii}(t)=0$，$t>0$，这表明系统从状态 i 出发，对不论多么短的时间间隔内，它都不可能继续保持或停留在状态 i 上，必须即刻离开 i。这时称此 i 为瞬

时状态。

如果$-\infty<q_{ii}<0$，那么系统从状态i出发，将在i上停留一段时间然后再离开i。由式(51)知系统停留在i上的时间τ是服从参数为$-q_{ii}$的指数分布，从而系统平均停留在i上的时间为

$$E(\tau|X_0=i)=1/-q_{ii}, \tag{52}$$

由此可见$-q_{ii}$越大，系统停留在i上的平均时间越短，发生转移越快，否则转移越慢。因此$-q_{ii}$直接地刻画了系统在状态i上的转移速率(或转移强度)。

(iii) 至于$q_{ij}(i\neq j)$的意义，间接地蕴含在下面的事实中[2]：如果$-\infty<q_{ii}<0$，$j\neq i$，则有

$$P(\tau<\infty,\lim_{t\to\tau+0}X_t=j|X_0=i)=q_{ij}/-q_{ii}, \tag{53}$$

这就表示在系统定要离开初始状态i的条件下，首次转移进入到状态j的条件概率是$q_{ij}/-q_{ii}$。

实际上，标准的转移概率函数$p_{ij}(t)$，$t\geqslant 0$，$i,j\in S$，在$t=0$点处的可导性也保证了$p_{ij}(t)$，$i,j\in S$在$t\in(0,\infty)$的每一点处的可导性，对此有下面的重要定理：

定理9 设连续参数齐次马氏链的转移概率函数$p_{ij}(t)$，$t\geqslant 0$，$i,j\in S$满足标准性条件，则

(i) 对任何$i,j\in S$，$p_{ij}(t)$在$t\in(0,\infty)$上有有穷的连续的导函数$p'_{ij}(t)$。如果$q_{ii}>-\infty$，那么$p'_{ij}(t)$在$t=0$处也连续。

(ii) 对任何$i\in S$，对一切$t>0$，$\sum_{j\in S}|p'_{ij}(t)|$有穷，而且对$t$不上升。如果$q_{ii}>-\infty$，那么还有

$$\sum_{j\in S}|p'_{ij}(t)|\leqslant -2q_{ii},\sum_{j\in S}p'_{ij}(t)=0,\quad t>0,\quad i\in S。 \tag{54}$$

(iii) 对任何i，$j\in S$，$p_{ij}(t)$，$t\geqslant 0$满足下列方程：

$$p'_{ij}(t+s)=\sum_{k\in S}p'_{ik}(t)p_{kj}(s),\qquad t>0,s\geqslant 0。 \tag{55}$$

$$p'_{ij}(t+s)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)p'_{kj}(s),\qquad t\geqslant 0,s>0。 \tag{56}$$

定理9的严格证明要用到测度论等较深的分析知识，不便在本书中给出，可参看文献[2]、[4]。

§3 柯尔莫哥洛夫向前与向后方程

在实际应用中，经检验判定所讨论系统的数学模型是一齐次马氏链X之后，要想直接给出X的转移概率函数族$\{p_{ij}(t),t\geqslant 0,i,j\in S\}$，一般是很困难的。然而§2已指出在通常都能满足的标准性条件之下，必有有穷的连续的导函数$p'_{ij}(t)$，$t\geqslant 0$，$i,j\in S$。于是很自然地会产生如下合理的设想：试图建立关于$\{p_{ij}(t),t\geqslant 0,i,j\in S\}$的微分方程组，如能得以实现，那么就可通过求解该微分方程组的分析方法，达到求得$\{p_{ij}(t),t\geqslant 0,i,j\in S\}$之目的。

定理10 设$\{p_{ij}(t),t\geqslant 0,i,j\in S\}$是标准的转移概率函数族，其密度矩阵$Q=[q_{ij}]$，

又 $q_{ii}>-\infty$，$i\in S$。则对任何 i，$j\in S$ 及任何 $t\geqslant 0$，有

$$p'_{ij}(t)\geqslant q_{ii}p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t), \tag{57}$$

$$p'_{ij}(t)\geqslant p_{ij}(t)q_{jj}+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj}。 \tag{58}$$

证　对任何 $t\geqslant 0$，$h>0$，由 C－K 方程有

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t), \tag{59}$$

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(h)-1}{h}+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h}, \tag{60}$$

在式（59）、式（60）中，令 $h\to 0+$，由定理9、定理7、定理8及法都定理，即得式（57）与式（58）。证完。

当式（57）与式（58）中的等号成立时，即对任何 i，$j\in S$，一切 $t\geqslant 0$，

$$p'_{ij}(t)=q_{ii}p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t), \tag{61}$$

$$p'_{ij}(t)=p_{ij}(t)q_{jj}+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj}。 \tag{62}$$

则分别依次称式（61）与式（62）为**柯尔莫哥洛夫向后与向前微分方程组**，简称**柯氏方程组**。若记矩阵 $p'(t)=[p'_{ij}(t)]$，那么式（61）与（62）可以用矩阵分别依次写成：

$$p'(t)=QP(t),\qquad P'(t)=P(t)Q。$$

一旦式（61）与式（62）成立，通过求解该线性微分方程组，便由这一个密度矩阵 Q 确定出了转移概率矩阵族 $\{P(t),t\geqslant 0\}$。Q 起到了像离散参数齐次马氏链中（一步）转移概率矩阵 P 一样的作用。这正是柯氏方程组和密度矩阵的重要意义所在。

由定理10，对于一般的标准转移矩阵族，$q_{ii}>-\infty$，$i\in S$，只能保证式（57）、（58）成立。柯氏方程组（61）、（62）未必成立。因此有必要寻求使得式（61）、（62）成立的条件。为此先给出下面有用的概念。

设连续参数齐次马氏链 X 的转移矩阵族 $\{P(t),t\geqslant 0\}$ 满足标准性条件，称其密度矩阵 $Q=[q_{ij}]$或 X **是保守的**，如果对任何 $i\in S$，都有

$$\sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}q_{ij}=-q_{ii}<\infty。 \tag{63}$$

如果 S 是有限集，那么在等式

$$\sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}\frac{p_{ij}(t)}{t}=\frac{1-p_{ii}(t)}{t},\quad t>0,i\in S$$

中令 $t\to 0+$，由定理8与定理7便得式（63）。所以满足标准性条件的有限齐次马氏链必是保守的。

定理11　设 $\{p_{ij}(t),t\geqslant 0,i,j\in S\}$ 是齐次马氏链的转移概率函数族，满足标准性条件。又 $q_{ii}>-\infty$，$i\in S$。则柯氏向后方程组

$$p'_{ij}(t) = q_{ii}(t)p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t), \quad i, j \in S, \quad t \geqslant 0 \tag{64}$$

成立的充要条件是其密度矩阵 $Q=[q_{ij}]$ 为保守的。

证 先证充分性，因为

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

故当 $t=0$时式（64）显然成立。现对任意给定的 $t>0$，i，$j\in S$ 倘若式（64）不成立，那么由定理10中的式（57）及定理9中的式（54）并用保守的假设条件有

$$0 = \sum_{r\in S} p'_{ir}(t) > \sum_{r\in S} q_{ii}p_{ir}(t) + \sum_{r\in S}\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kr}(t)$$
$$= q_{ii} + \sum_{k\neq i} q_{ik} = 0,$$

导出矛盾，这表明对一切 i，$j\in S$，$t>0$，式（64）必成立。

现证必要性。已知式（64）成立，对任意给定的 $i\in S$ 及 $t>0$，将等式（64）两方对 $j\in S$ 求和，因为$0\geqslant q_{ii}>-\infty$以及定理9有

$$0 = \sum_{j\in S} p'_{ij}(t) = \sum_{j\in S} q_{ii}p_{ij}(t) + \sum_{j\in S}\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) = q_{ii} + \sum_{k\neq i} q_{ik},$$

即式（63）成立，Q 是保守的，定理证完。

定理12 设 $\{p_{ij}(t), t\geqslant 0, i, j\in S\}$ 是齐次马氏链的转移概率函数族，满足标准性条件，又设 $q=\sup\limits_{i\in S}(-q_{ii})<\infty$，则柯氏向前方程组成立，即

$$p'_{ij}(t) = p_{ij}(t)q_{jj} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj}, \quad i, j \in S, \quad t \geqslant 0。\tag{65}$$

证 任意取定 i，$j\in S$，$t\geqslant 0$，$h>0$，对任何 $k\in S$，$k\neq j$，记 $f_k(t)=-\log p_{kk}(t)\geqslant 0$，则由定理7的式（36）及本定理的假设条件，得知

$$0 \leqslant \frac{p_{kj}(h)}{h} \leqslant \sum_{\substack{r\in S\\ r\neq k}} \frac{p_{kr}(h)}{h} = \frac{1-p_{kk}(h)}{h}$$
$$= \frac{1-e^{-f_k(h)}}{h} = \frac{1-e^{-\frac{f_k(h)}{h}\cdot h}}{h}$$
$$\leqslant \frac{1-e^{q_{kk}h}}{h} \leqslant -q_{kk} \leqslant q < \infty。\tag{66}$$

于是当 $h\to 0+$时，因为式（66）及$\sum\limits_{k\in S} p_{ik}(t)=1$，在等式

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = p_{ij}(t)\,\frac{p_{jj}(h)-1}{h} + \sum_{\substack{k\in S\\ k\neq j}} p_{ik}(t)\,\frac{p_{kj}(h)}{h}$$

中的右方级数关于 h 是一致收敛的，对上式两方取极限，由定理7与定理8即得式（65）。定理证完。

容易看出两断语“$q=\sup\limits_{i\in S}(-q_{ii})<\infty$”与“数集 $\{-q_{ii}, i\in S\}$ 有界”是等价的，现在给出这些断语的一个充要条件。

定理13 设 $Q=[q_{ij}]$ 是齐次马氏链标准转移概率函数族 $\{p_{ij}(t), t\geqslant 0, i, j\in S\}$ 的密度矩阵，则 $\{-q_{ii}, i\in S\}$ 有界的充要条件是

$$\lim_{t\to 0+} p_{ii}(t) = 1, \quad i \in S \tag{67}$$

对 i 一致成立。这时

$$\lim_{t\to 0+}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}=q_{ii},\quad i\in S \tag{68}$$

对 i 也一致成立。

证 先证必要性。记 $f_i(t)=-\log p_{ii}(t)$，由式(35)有

$$p_{ii}(t)=e^{-\frac{f_i(t)}{t}t}\geqslant e^{q_{ii}t},\ t>0,\quad i\in S, \tag{69}$$

如果 $\{-q_{ii},\ i\in S\}$ 有上界 $M\geqslant 0$，则式（69）知

$$p_{ii}(t)\geqslant e^{-Mt},\ 1-p_{ii}(t)\leqslant 1-e^{-Mt},\quad t\geqslant 0,\ i\in S,$$

于是对任给的 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使得 $0\leqslant 1-e^{-Mt}<\varepsilon$，对所有 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 之 t 都成立，故

$$0\leqslant 1-p_{ii}(t)<\varepsilon,\quad \text{一切}\ i\in S,\ 0\leqslant t\leqslant\delta, \tag{70}$$

式（70）即表示式（67）对 i 一致成立。

再证充分性。设式（70）已成立。对任取的一组非负数 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=\delta$，令

$$_{v}p_{ii}=\begin{cases}1, & v=0,\\ P(X_{t_m}=i,\ m=0,1,\cdots,v\,|\,X_0=i), & n\geqslant v\geqslant 1\end{cases} \tag{71}$$

则由式（70），以及马氏性、齐次性和概率的运算性质有

$$\begin{aligned}1-\varepsilon<p_{ii}(\delta)&={}_{n}p_{ii}+\sum_{v=0}^{n-2}\sum_{j\neq i}{}_{v}p_{ii}p_{ij}(t_{v+1}-t_v)p_{ji}(\delta-t_{v+1})\\&<{}_{n}p_{ii}+\sum_{v=0}^{n-2}\sum_{j\neq i}{}_{v}p_{ii}p_{ij}(t_{v+1}-t_v)\varepsilon\\&<{}_{n}p_{ii}+\varepsilon(1-{}_{n}p_{ii}),\end{aligned}$$

由此可得

$$(1-\varepsilon)(1-{}_{n}p_{ii})<1-p_{ii}(\delta)<\varepsilon。 \tag{72}$$

应用从标准性条件可导出的式（51）（见文献［2］），由式（72）得

$$(1-\varepsilon)(1-e^{q_{ii}\delta})<1-p_{ii}(\delta)<\varepsilon, \tag{73}$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{3}$，由式（73）得 $e^{q_{ii}\delta}>\frac{1}{2}$，故 $-q_{ii}<-\frac{1}{\delta}\log\frac{1}{2}$，对一切 $i\in S$ 都成立，即 $\{-q_{ii},\ i\in S\}$ 有界。

最后，由式（73）与式（69）知：

$$(1-\varepsilon)\frac{1-e^{q_{ii}\delta}}{\delta}-(-q_{ii})<\frac{1-p_{ii}(\delta)}{\delta}-(-q_{ii})<\frac{1-e^{q_{ii}\delta}}{\delta}-(-q_{ii}),$$

故
$$\left|\frac{1-p_{ii}(\delta)}{\delta}-(-q_{ii})\right|<\varepsilon\frac{1-e^{q_{ii}\delta}}{\delta}\leqslant\varepsilon\frac{1-e^{-M\delta}}{\delta}\leqslant\varepsilon M,\quad i\in S, \tag{74}$$

也即证明了 $\left|\frac{p_{ii}(t)-1}{t}-q_{ii}\right|<\varepsilon M$，$0\leqslant t\leqslant\delta$，$i\in S$，式（68）关于 i 一致成立。定理证完。

当 S 是有限集时，相应的标准转移矩阵族 $\{P(t),\ t\geqslant 0\}$ 除了是保守的之外，显然 $\sup\limits_{i\in S}(-q_{ii})<\infty$ 或 $\{-q_{ii},\ i\in S\}$ 有界或式（67）关于 $i\in S$ 一致成立等皆满足。因此对有限齐次标准马氏链，柯氏向后或向前方程组都成立，即总有

$$P'(t)=QP(t)=P(t)Q;\quad t\geqslant 0, \tag{75}$$

初始条件自然是 $P(0)=I$ 单位矩阵，而上面的常系数线性微分方程组的解就是

$$P(t)=e^{Qt}=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Qt)^n}{n!},\quad t\geqslant 0, \tag{76}$$

式（76）右方的级数收敛，并是方程组（75）的唯一解。所以有限齐次标准马氏链的转移矩阵族通过式（75）、（76）被它的密度矩阵唯一决定。

此外利用密度矩阵与柯氏方程组还能给出齐次标准马氏链 X 的绝对概率

$$p_j(t)=P(X_t=j)=\sum_{i\in S}p_ip_{ij}(t),\quad t\geqslant 0,j\in S \tag{77}$$

所满足的微分方程组，其中 $p_i=P(X_0=i)$，$i\in S$ 是 X 的初始分布。事实上，如果对齐次标准马氏链 X，$q_{ii}>-\infty$，$i\in S$，并且相应的柯氏向前方程组成立，即

$$p'_{ij}(t)=p_{ij}(t)q_{jj}+\sum_{\substack{k\in S\\k\neq j}}p_{ik}(t)q_{kj},\ t\geqslant 0,i,j\in S \tag{78}$$

用 p_i 乘上式（78）两边，然后对 $i\in S$ 求和得

$$\sum_{i\in S}p_ip'_{ij}(t)=\sum_{i\in S}p_ip_{ij}(t)q_{jj}+\sum_{i\in S}p_i\sum_{\substack{k\in S\\k\neq j}}p_{ik}(t)q_{kj},\ t\geqslant 0,j\in S。 \tag{79}$$

又假设下式成立：

$$\sum_{i\in S}p_ip'_{ij}(t)=\Big(\sum_{i\in S}p_ip_{ij}(t)\Big)'=p'_j(t),\ t\geqslant 0,j\in S,$$

即假设求导运算与求和运算可以交换，那么式（79）可写成

$$p'_j(t)=p_j(t)q_{jj}+\sum_{\substack{k\in S\\k\neq j}}p_k(t)q_{kj},\quad t\geqslant 0,j\in S \tag{80}$$

解此常系数齐次线性微分方程组（80）便可求得 $p_j(t)$，$t\geqslant 0$，$j\in S$。

特别地，如果对马氏链 X 有 $p_j(t)=\pi_j$ 常数，$t\geqslant 0$，$j\in S$，即 X 有平稳分布 $\pi=\{\pi_j,\ j\in S\}$：

$$\pi_j\geqslant 0,\ \sum_{j\in S}\pi_j=1,\ \pi_j=\sum_{i\in S}\pi_jp_{ij}(t),\quad t\geqslant 0,j\in S, \tag{81}$$

那么由式（80）即得平稳分布 π 要满足的代数方程：

$$0=\pi_jq_{jj}+\sum_{\substack{k\in S\\k\neq j}}\pi_kq_{kj},\ \sum_{j\in S}\pi_j=1,\quad j\in S。 \tag{82}$$

解此线性方程组便可得 X 的平稳分布。

当 S 是有限集时，由前面已经证实过的结论知式（75）、式（80）、式（82）总成立。因此对有限齐次标准马氏链而言，柯氏方程组与密度矩阵总可用来求得绝对概率与平稳分布。

伴随利用柯氏方程组寻求转移概率函数族的这个方法，自然会提出以下几个基本且重要的理论问题：即柯氏方程组的解是否存在？若存在，解是否唯一？若不唯一，如何找出所有解。然而真要求得出全部解是相当困难的。

更一般的是所谓 **Q-过程问题**。对于矩阵 $Q=[q_{ij}]$，如果

$$\begin{cases}q_{ij}\geqslant 0,\quad i,j\in S,\quad i\neq j;\quad 0\geqslant q_{ii}>-\infty,i\in S;\\ \displaystyle\sum_{\substack{j\in S\\j\neq i}}q_{ij}\leqslant -q_{ii},\quad i\in S\end{cases} \tag{83}$$

则称此 Q 为一个 **Q-矩阵**。对给定的一个 Q-矩阵 Q，如果存在一转移概率矩阵族 $\{P(t),\ t\geqslant 0\}$，使得它以此 Q 为自己的密度矩阵，则称此 $\{P(t),\ t\geqslant 0\}$ 为一个 **Q-过程**，或 **Q-过程问题**的一个解。而 **Q-过程问题**就是指：解是否存在？若存在，是否唯一？若不唯一，如何找出全部解？等基本理论问题。有关解答这一专题的深入内容需要参看一些专著和论文，如[2]及其后所列出的文献。

§4 两个重要的连续参数齐次马尔科夫链

本节将要介绍两个在实际应用中常作为具体问题的数学模型的连续参数齐次马氏链，给出它们的数学定义以及各自最基本的有用特性。至于具体的应用实例将集中在第九章里统一地进行论述。

1. 生灭过程

设连续参数齐次马氏链 $X=\{X_t, t\geqslant 0\}$ 的状态空间 S 为 $\{0, 1, 2, \cdots\}$，转移概率矩阵族为 $\{P(t)=[p_{ij}(t)], t\geqslant 0\}$，且满足标准性条件，又它的密度矩阵为 $Q=[q_{ij}]$，如果满足条件

$$q_{ij}=0, \qquad 当 i,j\in S, \quad |i-j|\geqslant 2。\tag{84}$$

更确切地说是对任何 i，$j\in S$ 有

$$\begin{cases} q_{i,i+1}=\lambda_i, \quad q_{i,i-1}=\mu_i, \quad q_{ii}=-(\lambda_i+\mu_i), \\ \qquad q_{ij}=0, \quad |i-j|\geqslant 2 \end{cases}, \tag{85}$$

其中 $\lambda_i\geqslant 0$，$i\in S$，$\mu_0=0$，对 $i\in S$ 但 $i\neq 0$，$\mu_i\geqslant 0$，且 $\lambda_i+\mu_i>0$，即 Q 呈下列形式：

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n & -(\lambda_n+\mu_n) & \lambda_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{86}$$

则称此 X 为**生灭过程**。由密度矩阵中每个元素 q_{ij} 的意义以及式 (85) 知，生灭过程的一种等价定义是 X 的转移概率函数族 $\{p_{ij}(t), t\geqslant 0, i, j\in S\}$ 满足下列条件：对任何 i，$j\in S$，在 $t\to 0+$ 时，有

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(t)=\lambda_i t+o(t), \\ p_{i,i-1}(t)=\mu_i t+o(t), \\ p_{ii}(t)=1-(\lambda_i+\mu_i)t+o(t), \\ p_{ij}(t)=o(t), \quad |i-j|\geqslant 2, \end{cases} \tag{87}$$

其中 λ_i，μ_i，$i\in S$ 是如前面所给的非负数。

如果生灭过程 X 所描述的是某群体含有个体的总数随时间变化的进程，那么式(87)就表示如果现有总数为 i 的该群体一旦发生了改变，只能转变到总数为 $i+1$ 或 $i-1$ 两种状态。由状态0只可能转变到状态1。因此如果该群体所含个体的总数从状态 i 经有限多次改变转移到了状态 j，$j\neq i$，则它必须经历过 i 与 j 之间的一切状态。对现有总数为 i 的群体，每当其大小增加了1时（或减少了1时），便说出现了一个增生（或一个消亡），并分别依次称 λ_i 与 μ_i 为**增生率与消亡率**。对生灭过程 X，如果 $\mu_i=0$，$i\in S$，即只有增生而无消亡，这时称此 X 是**纯生过程**，类似地，如果 $\lambda_i=0$，$i\in S$，即只有消亡而无增生。自然称此 X 是**纯灭过程**。

从上面的论述已经看出，λ_i（或 μ_i）起到了刻画群体大小从 i 增长到 $i+1$（或减少到 $i-1$）的转移强度的作用。现在再进一步考察 λ_i 与 μ_i 的意义。我们总可以适当地选择时间单

位使得 $\lambda_i<1$，并且可用此 λ_i 作为群体大小从 i 开始在下一个时间单位达到 $i+1$ 的概率的近似值。于是群体大小从 i 开始达到 $i+1$ 所需时间单位数的期望值为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} nP\,(\text{开始为 } i\text{，在第 } n \text{ 个时间单位首次达到 } i+1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\lambda_i)^{n-1}\lambda_i = \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \Big|_{x=(1-\lambda_i)} \\
&= \lambda_i \Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)' \Big|_{x=1-\lambda_i} = \lambda_i \Big(\frac{x}{1-x}\Big)' \Big|_{x=1-\lambda_i} \\
&= \lambda_i \frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=1-\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i}\text{。}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

因此 λ_i 还起到了群体大小开始为 i 直到在下一次增生达到 $i+1$ 所需时间服从的指数分布中的参数作用。同样 μ_i 也起到了群体大小开始为 i 直到在下一次消亡减少到 $i-1$ 所需时间服从的指数分布中的参数作用。由此引出了生灭过程的另一种等价定义[13]。

称状态空间 S 为 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 的连续参数齐次标准马氏链 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是一个**生灭过程**，如果满足下列条件：

(i) 当链开始处在状态 i，直到它首次移动到达状态 $i+1$ 为止，所需的时间服从参数为 λ_i 的指数分布；

(ii) 当链开始处在状态 i，直到它首次移动到达状态 $i-1$ 为止，所需时间服从参数为 μ_i 的指数分布；

(iii) (i)与(ii)中所有这些所需时间是相互独立的。

现在给出有关生灭过程的转移概率函数及平稳分布的几个结论。

定理14 (i) 设 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是纯生过程，$\sup\limits_{i\in S}\{\lambda_i\}<\infty$，则

$$p_{ij}(t) = 0, \quad i, j\in S, \quad j<i, \quad t\geqslant 0, \tag{89}$$

$$p_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}, \quad i\in S, \quad t\geqslant 0, \tag{90}$$

$$p_{ij}(t) = \lambda_{j-1}\int_0^t e^{-\lambda_j(t-u)} p_{i,j-1}(u)du, \quad i, j\in S, \quad j>i, \quad t\geqslant 0, \tag{91}$$

$$p_{i,i+1}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}(e^{-\lambda_i t} - e^{-\lambda_{i+1}t}), & \lambda_{i+1}\neq\lambda_i, \\ \lambda_i t e^{-\lambda_i t} & \lambda_{i+1}=\lambda_i, \end{cases} \quad i\in S \tag{92}$$

(ii) 设 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是纯灭过程，$\sup\limits_{i\in S}\{\mu_i\}<\infty$，则

$$p_{ij}(t) = 0, i, j\in S, j>i, t\geqslant 0, \tag{93}$$

$$p_{ii}(t) = e^{-\mu_i t}, \quad i\in S, t\geqslant 0, \tag{94}$$

$$p_{ij}(t) = \mu_{j+1}\int_0^t e^{-\mu_j(t-u)} p_{ij+1}(u)du, i, j\in S, j<i, t\geqslant 0, \tag{95}$$

$$p_{i,i-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_i}{\mu_{i-1}-\mu_i}(e^{-\mu_i t} - e^{-\mu_{i-1}t}), & \mu_i\neq\mu_{i-1}, \\ \mu_i t e^{-\mu_i t}, & \mu_i=\mu_{i-1}, \end{cases} \quad i\in S\text{。} \tag{96}$$

证 (i) 因为是纯生过程，所以式 (89) 显然成立。由假设条件，柯氏向前微分方程

组成立，即有

$$p'_{ij}(t) = p_{ij}(t)(-\lambda_j) + p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1}, \ i, j \in S, t \geqslant 0。 \tag{97}$$

于是由式（97）与式（89）取 $j=i$ 得

$$p'_{ii}(t) = -\lambda_i p_{ii}(t), \quad i \in S, \quad t \geqslant 0,$$

既然 $p_{ii}(0)=1$，解上面的方程即得式（90）。

对任意给定的 $i, j \in S$，由方程（97）及 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$，利用一阶线性常微分方程的参数变易求解法，即得式（91）。

特别地在式（91）中，当 $j=i+1$时，应用式（90）便有

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(t) &= \lambda_i \int_0^t e^{-\lambda_{i+1}(t-u)} p_{ii}(u) du \\ &= \lambda_i \int_0^t e^{-\lambda_{i+1}(t-u)} e^{-\lambda_i u} du \\ &= \lambda_i e^{-\lambda_{i+1} t} \int_0^t e^{(\lambda_{i+1}-\lambda_i) u} du \\ &= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}(e^{-\lambda_i t} - e^{-\lambda_{i+1} t}), & \lambda_{i+1} \neq \lambda_i \\ \lambda_i t e^{-\lambda_{i+1} t}, & \lambda_{i+1} = \lambda_i, \end{cases} \quad i \in S, \ t \geqslant 0。 \end{aligned}$$

式（92）得证。(i) 证完。(ii) 中的式(93)－(96)完全类似可证。

为寻求生灭过程具有平稳分布的充要条件，需要下面的引理。

引理3 设 $\{p_{ij}(t), t \geqslant 0, i, j \in S\}$ 是齐次马氏链的转移概率函数族，满足标准性条件，则

$$\lim_{t \to \infty} p'_{ij}(t) = 0, \quad i, j \in S。 \tag{98}$$

证 由定理9，在式(55)中，固定 t 而令 $s \to \infty$时，因为式(28)、(29)知下列极限存在

$$\begin{aligned} \lim_{s \to \infty} p'_{ij}(t+s) &= \lim_{s \to \infty} \sum_{k \in S} p'_{ik}(t) p_{kj}(s) \\ &= \sum_{k \in S} p'_{ik}(t) \lim_{s \to \infty} p_{kj}(s) \\ &= \sum_{k \in S} p'_{ik}(t) \pi_j。 \end{aligned}$$

记此极限为 $\rho_{ij} = \lim\limits_{t \to \infty} p'_{ij}(t)$，$i, j \in S$。对任意给定的 $i, j \in S$，倘若设 $\rho_{ij} > 0$，那么必存在正数 c，使得

$$\frac{1}{2}\rho_{ij} < p'_{ij}(t) < \frac{3}{2}\rho_{ij}, \quad t \geqslant c。$$

成立。再由定理9知 $p'_{ij}(t)$在 $(0, \infty)$ 上连续，故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho_{ij}(t-c) &\leqslant p_{ij}(t) - p_{ij}(c) \\ &= \int_c^t p'_{ij}(s) ds \leqslant \frac{3}{2}\rho_{ij}(t-c), \quad t \geqslant c。 \end{aligned}$$

由此可得$\lim\limits_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \infty$，但这与$0 \leqslant p_{ij}(t) \leqslant 1$，$i \geqslant 0$矛盾，所以 ρ_{ij}不可能大于零。类似可证 ρ_{ij} 也不可小于零，于是必有 $\rho_{ij}=0$。引理证完。

定理15 设 $X=\{X_t, t \geqslant 0\}$ 是生灭过程，增生率 λ_j：$0 < \lambda_j < \infty$，$j \in S$，$\sup\limits_{j \in S}\{\lambda_j\} < \infty$，

消亡率 μ_j：$0<\mu_j<\infty$，$j\in S-\{0\}$，$\sup\limits_{j\in S}\{\mu_j\}<\infty$，则此 X 具有平稳分布 $\{\pi_j,\ j\in S\}$ 的充要条件是

$$\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0}{\mu_{j+1}\mu_j\cdots\mu_1}<\infty, \tag{99}$$

而且这时有

$$\pi_0=\frac{1}{1+\sum\limits_{j\in S}(\lambda_j\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0/\mu_{j+1}\mu_j\cdots\mu_1)}, \tag{100}$$

$$\pi_j=\frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}\pi_0,\qquad j\in S-\{0\}。 \tag{101}$$

证 在定理的假设条件下首先可以看出 X 的一切状态都是互通的，从而 X 是不可分的。所以由定理6知存在下列不依赖于 i 的极限：

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j,\quad i,j\in S, \tag{102}$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}p_j(t)&=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\in S}p_i(0)p_{ij}(t)\\&=\sum_{i\in S}p_i(0)\pi_j=\pi_j,\quad j\in S。\end{aligned} \tag{103}$$

因此如果 X 有平稳分布 π，那么此 π 必定是 $\{\pi_j,\ j\in S\}$。并且在定理的假设条件下，X 是保守的，相应的柯氏向后与向前方程组都成立。进而由式（82）知 $\{\pi_j,\ j\in S\}$ 应满足如下代数方程：

$$-\pi_jq_{jj}=\pi_{j-1}q_{j-1,j}+\pi_{j+1}q_{j+1,j},\ j\in S,\ \sum_{j\in S}\pi_j=1。 \tag{104}$$

将 $q_{jj}=-(\lambda_j+\mu_j)$，$q_{j-1,j}=\lambda_{j-1}$，$q_{j+1,j}=\mu_{j+1}$ 代入上式（104）得

$$\pi_j\lambda_j-\pi_{j+1}\mu_{j+1}=\pi_{j-1}\lambda_{j-1}-\pi_j\mu_j,\quad j\in S。 \tag{105}$$

其中规定 $\lambda_{-1}=\mu_0=0$。于是在式（105）中取 $j=0$便有

$$\pi_0\lambda_0-\pi_1\mu_1=0,\quad \pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0, \tag{106}$$

再在式（105）中取 $j=1$，并应用式（106）就有

$$\pi_1\lambda_1-\pi_2\mu_2=0,\quad \pi_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1。$$

于是应用归纳法得到下列递推关系式：

$$\pi_{j+1}=\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}\pi_j,\quad j\in S, \tag{107}$$

从而有

$$\pi_j=\frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}\pi_0\quad j\in S-\{0\}, \tag{108}$$

此即为式（101）。由式（104）可得

$$1=\sum_{j\in S}\pi_j=\pi_0\left[1+\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0}{\mu_{j+1}\mu_j\cdots\mu_1}\right]。 \tag{109}$$

既然已假定平稳分布 $\{\pi_j,\ j\in S\}$ 存在，必有$0\leqslant\pi_0\leqslant1$，于是由式（109）知必须

$$\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0}{\mu_{j+1}\mu_j\cdots\mu_1}<\infty,$$

即式（99）成立。再由式（109）即得式（100）。必要性得证。

现证充分性。在定理的假设条件下柯氏向前微分方程组成立，即对任何 $i\in S$，$t\geqslant 0$有

$$\begin{cases}p'_{ij}(t)=-(\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t)+\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t)+\mu_{j+1}p_{i,j+1}(t),\ j\in S-\{0\},\\ p'_{i0}(t)=-\lambda_0 p_{i0}(t)+\mu_1 p_{i1}(t)。\end{cases}\tag{110}$$

在上式（110）中令 $t\to\infty$，由定理6之(i)及引理3便得

$$\begin{cases}\mu_{j+1}\pi_{j+1}=(\lambda_j+\mu_j)\pi_j-\lambda_{j-1}\pi_{j-1}。j\in S-\{0\}\\ \mu_1\pi_1=\lambda_0\pi_0,\end{cases}\tag{111}$$

其中 π_j 是定理6已证实存在的极限 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j$，$i$，$j\in S$。应用归纳法由式（111）容易解得

$$\pi_j=\frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}\pi_0,\quad j\in S-\{0\}。\tag{112}$$

再由定理6中的式（25）及式（112）便有

$$\begin{aligned}1\geqslant\sum_{j\in S}\pi_j&=\pi_0\left(1+\sum_{j\in S-\{0\}}\frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}\right)\\&=\pi_0\left(1+\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0}{\mu_{j+1}\mu_j\cdots\mu_1}\right)。\end{aligned}\tag{113}$$

如果 $\sum\limits_{j\in S}(\lambda_j\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0/\mu_{j+1}\mu_j\cdots\mu_1)<\infty$，就取 π_0 为

$$\pi_0=\frac{1}{1+\sum\limits_{j\in S}(\lambda_j\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0/\mu_{j+1}\mu_j\cdots\mu_1)},$$

取

$$\pi_j=\frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}\pi_0,\quad j\in S-\{0\}。$$

这样所定义的 $\{\pi_j,\ j\in S\}$ 是方程组（111）的唯一解。显然它是一概率分布，而且是 $\{p_{ij}(t),\ t\geqslant 0,\ i,\ j\in S\}$ 的平稳分布。

倘若 $\sum\limits_{j\in S}\frac{\lambda_j\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0}{\mu_{j+1}\mu_j\cdots\mu_1}=\infty$，则由式（113）及（112）知 $\pi_0=\pi_1=\cdots=0$，$\{\pi_j,\ j\in S\}$ 不是概率分布，这说明在 $t\to\infty$时 X 取任何有限值的概率为零，换言之以概率1 X 的值将趋于无穷大，充分性得证。

关于生灭过程的更加深入而丰富的内容，如几个数字特征的概率意义及它们之间的关系，若干重要的停时及其分布，几种特殊的生灭过程所具有的重要性质等等可参看文献[2]、[37]、[38]中相当详尽的介绍。本书仅再论述一类十分重要的特殊的生灭过程及其基本性质。

2. 普阿松过程

普阿松 Poisson 过程有多种等价的定义形式。

定义1　设 $X=\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是状态空间为 $S=\{0,\ 1,\ 2\cdots\}$ 的随机过程，如果 X 是一纯生过程，而且增生率恒为一正常数，即

$$\lambda_i = \lambda > 0, \quad i \in S, \tag{114}$$

且 $X_0=0$，则称此 X 是具有参数 λ 的普阿松过程。

定义2 设 $X=\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是状态空间为 $S=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 的随机过程，称此 X 是具有参数 $\lambda>0$ 的普阿松过程，如果它满足下列三个条件：

(i) $X_0=0$，即 X 的初始状态总为0；

(ii) 对任意给定的正整数 n 及任意的 $n+1$ 个实数 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n$，随机变量 $X_{t_0}-X_0$，$X_{t_1}-X_{t_0}$，$\cdots$，$X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ 是相互独立的，即 X 具有独立的增量；

(iii) 对任意给定的非负实数 $0\leqslant s\leqslant t$，随机变量 X_t-X_s 具有参数为 $\lambda(t-s)$ 的普阿松分布，即

$$P(X_t - X_s = k) = (\lambda(t-s))^k e^{-\lambda(t-s)}/k!, \quad k = 0,1,\cdots, \tag{115}$$

即增量 X_t-X_s 的分布仅依赖于区间 $[s, t]$ 的长度 $t-s$，而与区间的具体位置无关，也即此 X 具有平稳的增量。

定义3 设 $X=\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是状态空间为 $S=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 的随机过程，称此 X 是具有参数 $\lambda>0$ 的普阿松过程，如果下列条件成立：

(i′) $X_0=0$；

(ii′) X 具有独立的且平稳的增量，增量非负；

(iii′) 对任何 $t\geqslant 0$，当 $h\to 0+$ 时有：

$$\begin{cases} P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + 0(h), \\ P(X_{t+h} - X_t \geqslant 2) = 0(h), \end{cases} \tag{116}$$

(iv′) 对任何 $j\in S$，$P_j(t)=P(X_t=j)$ 是在 $[0, \infty)$ 上 t 的连续函数。

定理16 普阿松过程的三种定义形式：定义1、定义2、定义3等价。

证 先证定义1→定义2。定义2中的条件 (i) 显然成立。因为假设 X 是纯生过程及式 (114)。由定理14中的式 (89)、(90)、(91)、(92) 有

$$p_{ij}(t) = 0, i, j \in S, \quad j < i, \quad t \geqslant 0, \tag{117}$$

$$p_{ii}(t) = e^{-\lambda t}, \quad i \in S, \quad t \geqslant 0, \tag{118}$$

$$p_{ij}(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} p_{i,j-1}(u) du, \quad i,j \in S, \quad j > i, \quad t \geqslant 0, \tag{119}$$

由式 (119) 得

$$p_{i,i+1}(t) = \lambda t e^{-\lambda t}, \quad i \in S, t \geqslant 0, \tag{120}$$

$$p_{i,i+2}(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \lambda u e^{-\lambda u} du$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t u du = (\lambda t)^2 e^{-\lambda t}/2, i \in S, t \geqslant 0。 \tag{121}$$

应用式 (120)、(121)、(119) 及归纳法可得

$$p_{ij}(t) = (\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}/(j-i)!, \quad i, j \in S, \quad j \geqslant i, \quad t \geqslant 0, \tag{122}$$

从式 (122) 知

$$p_{ij}(t) = p_{0,j-i}(t), \quad i, j \in S, \quad j \geqslant i, \quad t \geqslant 0。 \tag{123}$$

对任意的实数 s，t：$0\leqslant s\leqslant t$ 及任意的 $k\in S$，由式 (123)、(122) 有

$$P(X_t - X_s = k) = \sum_{i \in S} P(X_s = i) p_{i,i+k}(t-s) = \sum_{i \in S} p(X_s = i) p_{0k}(t-s)$$
$$= p_{0k}(t-s) = \frac{(\lambda(t-s))^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!}。 \tag{124}$$

即 $X_t - X_s$ 服从参数为 $\lambda(t-s)$ 的普阿松分布，定义2中条件（iii）成立。

对任给的 $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$ 及任给的 $k_1, \cdots, k_{n-1} \in S$，由 X 的马氏性、齐次性及式（123）、（124）有

$$P(X_{t_2} - X_{t_1} = k_1, X_{t_3} - X_{t_2} = k_2, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_{n-1})$$
$$= \sum_{x \in S} P(X_{t_1} = x, X_{t_2} = x + k_1, X_{t_3} = x + k_1 + k_2, \cdots, X_{t_n} = x + k_1 + \cdots + k_{n-1})$$
$$= \sum_{x \in S} P(X_{t_1} = x) P_{x,x+k_1}(t_2 - t_1) p_{x+k_1,x+k_1+k_2}(t_3 - t_2) \cdots p_{x+k_1+\cdots+k_{n-2},x+k_1+\cdots+k_{n-1}}(t_n - t_{n-1})$$
$$= p_{0k_1}(t_2 - t_1) p_{0k_2}(t_3 - t_2) \cdots p_{0k_{n-1}}(t_n - t_{n-1})$$
$$= P(X_{t_2} - X_{t_1} = k_1) P(X_{t_3} - X_{t_2} = k_2) \cdots P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_{n-1})。$$

这说明 $X_{t_2} - X_{t_1}$，$X_{t_3} - X_{t_2}$，$\cdots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 独立。定义2中条件（ii）增量独立满足。

其次证定义2→定义1。对任给的正整数 n，任取的非负实数 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，任取的状态 $k_0, k_1, \cdots, k_n \in S$，$k_0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_n$，由定义2中的条件（ii）与（iii），即有独立的平稳增量知

$$P(X_{t_0} = k_0, X_{t_1} = k_1, \cdots, X_{t_n} = k_n)$$
$$= P(X_{t_0} = k_0, X_{t_1} - X_{t_0} = k_1 - k_0, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})$$
$$= P(X_{t_0} = k_0) P(X_{t_1} - X_{t_0} = k_1 - k_0) \cdots P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}),$$

故

$$P(X_{t_n} = k_n | X_{t_0} = k_0, X_{t_1} = k_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1})$$
$$= P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})$$
$$= (\lambda(t_n - t_{n-1})^{k_n - k_{n-1}} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1}} (k_n - k_{n-1})!, \tag{125}$$

完全类似地可证

$$P(X_{t_n} = k_n | X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) = (\lambda(t_n - t_{n-1}))^{k_n - k_{n-1}} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} / (k_n - k_{n-1})! \tag{126}$$

倘若 $k_0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_{n-1}$，而 $k_{n-1} > k_n$，则由式（115）之规定知

$$P(X_{t_n} = k_n | X_{t_0} = k_0, \cdots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1})$$
$$= 0 = P(X_{t_n} = k_n | X_{t_{n-1}} = k_{n-1}), \tag{127}$$

又若 $k_0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots k_{n-1}$ 不成立的话，仍由式（115）之规定知 $P(X_{t_0} = k_0, \cdots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) = 0$，故这时 $P(X_{t_n} = k_n | X_{t_0} = k_0, \cdots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1})$ 是无意义的。综上所述并比较式（125）与（126）知式（1）成立。即 X 具有马氏性。并由式（126）知 X 的转移概率函数为

$$p_{ij}(s,t) = \begin{cases} (\lambda(t-s))^{j-i} e^{-\lambda(t-s)} / (j-1)!, & j \geqslant i, \\ 0, & j < i, \end{cases} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \tag{128}$$

由式（128）可见 X 是齐次的与标准的，并由它即可算得 X 的密度矩阵 Q 为

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}。$$

故 X 是由定义1所给出的普阿松过程。

再证定义2→定义3。由定义2中的条件（i）、（ii）、（iii），定义3中的条件（i′）、（ii′）、（iv′）显然成立。由式（115），当 $h\to 0+$ 时，

$$P(X_{t+h}-X_t=1)=\lambda he^{-\lambda h}=\lambda h\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda h)^n/n!\right]$$
$$=\lambda h[1-\lambda h+0(h)]=\lambda h+0(h)。$$
$$P(X_{t+h}-X_t\geqslant 2)=\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda h)^k e^{-\lambda h}/k!=e^{-\lambda h}[e^{\lambda h}-1-\lambda h]=0(h),$$

故定义3中的条件（iii′）成立。

最后证定义3→定义2。由定义3中的条件（i′）、（ii′）定义2中的条件（i）、（ii）显然成立。对任何 $t\geqslant 0$，$h>0$，当 $h\to 0+$ 时，利用定义3中的条件（ii′）、（iii′）及式（116）有

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= P(X_{t+h}=0)=P(X_t=0,\ X_{t+h}-X_t=0)\\ &= P(X_t=0)P(X_{t+h}-X_t=0)\\ &= p_0(t)[1-P(X_{t+h}-X_t\geqslant 1)]\\ &= p_0(t)[1-\lambda h+0(h)]。\end{aligned}$$

于是有

$$\lim_{h\to 0+}\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}\lim_{h\to 0+}\left(-\lambda p_0(t)+\frac{0(h)}{h}\right)=-\lambda p_0(t)。$$

同理，对 $t>0$，$t>h>0$，在上面的两式中用 t 替换 $t+h$，而用 $t-h$ 替换 t，便得

$$\begin{aligned} p_0(t) &= P(X_t=0)=P(X_{t-h}=0,\ X_t-X_{t-h}=0)\\ &= P(X_{t-h}=0)P(X_t-X_{t-h}=0)\\ &= p_0(t-h)[1-P(X_t-X_{t-h}\geqslant 1)]\\ &= p_0(t-h)[1-\lambda h+0(h)]。\end{aligned}$$

应用定义3中的条件（iv′）便有

$$\lim_{h\to 0+}\frac{p_0(t-h)-p_0(t)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\left(-\lambda p_0(t-h)+\frac{0(h)}{h}\right)=-\lambda p_0(t)。$$

综上所述得知 $p_0(t)$在 $[0,\infty)$ 上每一点处右导数与左导数都存在而且相等，故有

$$p_0'(t)=-\lambda p_0(t),\quad t\geqslant 0。$$

解此方程得 $p_0(t)=ce^{-\lambda t}$；$t\geqslant 0$，其中常数 c 被条件 $p_0(0)=P(X_0=0)=1$ 确定为1，所以

$$p_0(t)=e^{-\lambda t},\ t\geqslant 0。\tag{129}$$

类似地，对任何 $j\in S-\{0\}$，$t\geqslant 0$，$h\to 0+$ 时有

$$p_j(t+h)=P(X_{t+h}=j)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\{\bigcup_{k=0}^{j}[(X_t = j-k) \cap (X_{t+h} - X_t = k)]\} \\
&= P(X_t = j,\ X_{t+h} - X_t = 0) \\
&\quad + P(X_t = j-1,\ X_{t+h} - X_t = 1) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{j} P(X_t = j-k,\ X_{t+h} - X_t = k) \\
&= p_j(t)p_0(h) + p_{j-1}(t)p_1(h) + 0(h) \\
&= (1-\lambda h)p_j(t) + \lambda h p_{j-1}(t) + 0(h),
\end{aligned}
$$

由此便有

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{p_j(t+h) - p_j(t)}{h} &= \lim_{h\to 0+}\left(-\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \frac{0(h)}{h}\right) \\
&= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t)。
\end{aligned}
$$

同理，对 $t>0$，$t>h>0$，在上面的两式中 $t+h$ 用 t 替换，t 用 $t-h$ 替换便有

$$
\begin{aligned}
p_j(t) = P(X_t = j) &= P\{\bigcup_{k=0}^{j}[(X_{t-h} = j-k) \cap (X_t - X_{t-h} = k)]\} \\
&= P(X_{t-h} = j,\ X_t - X_{t-h} = 0) + P(X_{t-h} = j-1, X_t \\
&\quad - X_{t-h} = 1) + \sum_{k=2}^{j} P(X_{t-h} = j-k, X_t - X_{t-h} = k) \\
&= (1-\lambda h)p_j(t-h) + \lambda h p_{j-1}(t-h) + 0(h),
\end{aligned}
$$

由定义3中的条件（iv′）便有

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{p_j(t-h) - p_j(t)}{-h} &= \lim_{h\to 0+}\left(-\lambda p_j(t-h) + \lambda p_{j-1}(t-h) + \frac{0(h)}{h}\right) \\
&= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t)。
\end{aligned}
$$

总之，$p_j(t)$在 $[0,\ \infty)$ 中的每一点处右导数与左导数都存在且相等，从而有

$$
p_j'(t) = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t),\ t \geqslant 0,\ j \in S - \{0\},
$$

或等价地有

$$
\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}p_j(t)] = \lambda e^{\lambda t}p_{j-1}(t),\ j \in S - \{0\}, \tag{130}
$$

在式（130）中取 $j=1$，并利用式（129）得

$$
\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}p_1(t)] = \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} = \lambda,
$$

求解此方程得通解为

$$
p_1(t) = (\lambda t + c)e^{-\lambda t},
$$

其中常数 c 被条件（i′）所导致的 $p_1(0)=P\ (X_0=1)\ =0$确定为零。所以应有 $p_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$，$t \geqslant 0$。

下面将用归纳法证明下列一般表达式成立，

$$
p_j(t) = P(X_t = j) = (\lambda t)^j e^{-\lambda t}/j!,\quad j \in S - \{0\}。 \tag{131}
$$

当 $j=1$时前面已证实式（131）为真。现作归纳假定：若对 $j=k$（$k \geqslant 1$）时式（131）已为真。对 $j=k+1$，由式（130）与式（131）有

$$
\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}p_{k+1}(t)] = \lambda e^{\lambda t}p_k(t) = \lambda^{k+1}t^k/k!
$$

经积分得 $e^{\lambda t}p_{k+1}(t)=c+(\lambda t)^{k+1}/(k+1)!$。既然 $p_{k+1}(0)=0$，故常数 c 被确定为 $c=0$。于是式（131）对 $j=k+1$ 也真。式（131）得证。再利用条件（ii′）便知定义2中的条件（iii）即式（115）成立。定理证完。

下面将先引出几个刻画普阿松过程基本性质的时间特征量，然后再来寻求这些特征量的分布。若以 X_t 表示从零时直到 t 时发射出尖峰信号的个数，那么 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 往往可以近似地看作为一个普阿松过程。如图1所示，用 T_1，T_2，…分别依次记第一个尖峰信号，第二个尖峰信号，…的发射时间，又以 τ_n，$n=1, 2, \cdots$ 表示以第 $n-1$ 个信号发射到第 n 个信号发射所经过的时间。一般分别依次称 T_n，$n=1, 2, \cdots$ 为**第 n 次发生时间或第 n 个事件的等待时间**，称 τ_n，$n=1, 2, \cdots$ 为**第 n 个相继发生的间隔时间**。若设 t 是附有约束：$t\neq T_n$，$n=1, 2, \cdots$ 的任意确定的时间，则以 ϕ_t 记从 t 开始直到下一个信号发射为止所经历的时间，而以 ψ_t 记从最近于 t 的上一个信号发射时间开始直到 t 为止所经历的时间。

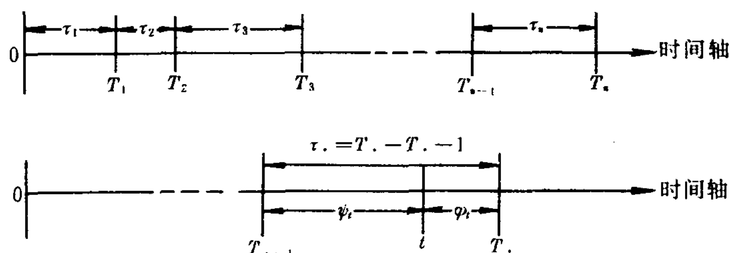


图 1　普阿松过程的时间特征量示意图

定理17　设 $X=\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是具有参数 $\lambda>0$ 的普阿松过程，令 τ_n，$n=1, 2, \cdots$ 是 X 的相继发生间隔时间序列，则 τ_n，$n=1, 2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，皆服从参数为 λ 的指数分布，从而 $E\tau_n=1/\lambda$，$n=1, 2, \cdots$。

证　为使证明在记号与叙述上简便起见，仅对 τ_1 与 τ_2 进行论证。至于对任意有穷多个 τ_1，τ_2，…，τ_n 的证明是类似的。

首先由 τ_1 的定义知：对任何实数 $y_1<0$，必有 $P(\tau_1\leqslant y_1)=0$。而对任意的 $y_1\geqslant 0$，由 $X_0=0$ 及式（115）

$$P(\tau_1\leqslant y_1)=P(X_{y_1}-X_0\geqslant 1)=1-e^{-\lambda y_1} \tag{132}$$

即 τ_1 服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布。

对任意的 y_1，$y_2>0$，由 τ_1，τ_2 的定义及概率的运算性质，对任给的正整数 n 有

$$\begin{aligned}&P(\tau_1\leqslant y_1,\ \tau_2\leqslant y_2)\\&\leqslant\sum_{m=0}^{n-1}P(X_{\frac{m}{n}y_1}-X_0=0,\ X_{\frac{m+1}{n}y_1}-X_{\frac{m}{n}y_1}=1,\\&X_{\frac{m+1}{n}y_1+y_2}-X_{\frac{m+1}{n}y_1}\geqslant 1)+\sum_{m=0}^{n-1}\\&P(X_{\frac{m}{n}y_1}-X_0=0,\ X_{\frac{m+1}{n}y_1}-X_{\frac{m}{n}y_1}\geqslant 2)\end{aligned}$$

因为普阿松过程 X 具有独立的平稳增量及式（115）或（116），所以上式右方为

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{-\lambda\frac{m}{n}y_1} e^{-\lambda\frac{y_1}{n}} \frac{\lambda y_1}{n}(1-e^{-\lambda y_2}) + \sum_{m=0}^{n-1} o\left(\frac{y_1}{n}\right)$$
$$= \frac{1-e^{-\lambda y_1}}{1-e^{-\lambda\frac{y_1}{n}}} e^{-\lambda\frac{y_1}{n}} \frac{\lambda y_1}{n}(1-e^{-\lambda y_2}) + no\left(\frac{y_1}{n}\right)$$

令 $n\to\infty$，便得

$$P(\tau_1 \leqslant y_1,\ \tau_2 \leqslant y_2) \leqslant (1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2}),\quad y_1, y_2 > 0$$

另一方面，又有相反的不等式：对使得 $\frac{y_1}{n} < y_2$ 的 n，

$$P(\tau_1 \leqslant y_1,\ \tau_2 \leqslant y_2)$$
$$\geqslant \sum_{m=0}^{n-1} P(X_{\frac{m}{n}y_1} - X_0 = 0,\ X_{\frac{m+1}{n}y_1} - X_{\frac{m}{n}y_1} = 1,$$
$$X_{\frac{m}{n}y_1+y_2} - X_{\frac{m+1}{n}y_1} \geqslant 1)$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\lambda\frac{m}{n}y_1} e^{-\lambda\frac{y_1}{n}} \frac{\lambda y_1}{n}\left(1-e^{-\lambda\left(y_2-\frac{y_1}{n}\right)}\right)$$
$$= \frac{1-e^{-\lambda y_1}}{1-e^{-\lambda\frac{y_1}{n}}} e^{-\lambda\frac{y_1}{n}} \frac{\lambda y_1}{n}\left(1-e^{-\lambda\left(y_2-\frac{y_1}{n}\right)}\right)$$

由此可见，当 $n\to\infty$ 时有

$$P(\tau_1 \leqslant y_1,\ \tau_2 \leqslant y_2) \geqslant (1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2}),\quad y_1, y_2 > 0$$

综上所述便得：对 y_1，$y_2>0$，

$$P(\tau_1 \leqslant y_1,\ \tau_2 \leqslant y_2) = (1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2}) \tag{133}$$

在式（113）中令 $y_1\to\infty$，或令 $y_2\to\infty$ 分别得

$$\begin{cases} P(\tau_2 \leqslant y_2) = 1-e^{-\lambda y_2}, & y_2 > 0, \\ P(\tau_1 \leqslant y_1) = 1-e^{-\lambda y_1}, & y_1 > 0, \end{cases} \tag{134}$$

又注意到 $P(\tau_1\leqslant y_1)=0$，$y_1\leqslant 0$ 与 $P(\tau_2\leqslant y_2)0$，$y_2\leqslant 0$。最后便有 $P(\tau_1 \leqslant y_1,\ \tau_2 \leqslant y_2) = P(\tau_1 \leqslant y_1)P(\tau_2 \leqslant y_2)$，$-\infty < y_1, y_2 < \infty$。这表明 τ_1 与 τ_2 独立，再由式（134）知它们都服从参数为 λ 的指数分布。定理证完。

定理17的重要性在于它揭示了普阿松过程的特征性质，从而提供了一种检验一列在时间上随机发生的事件是否属于普阿松类型事件序列的方法。并在实践中应用蒙特卡罗（Monte Carlo）方法模拟产生普阿松过程时，也要用到这个结论。

推论　在与定理17同样的假设条件下，对任意给定的正整数 n，τ_n 与 T_n 都是以概率1有限的随机变量，即

$$P(\tau_n < \infty) = 1,\quad P(T_n < \infty) = 1,\quad n = 1, 2, \cdots, \tag{135}$$

而且 T_n 与 τ_{n+1}，τ_{n+2}，$\cdots$ 独立。

证　由概率的连续性定理及定理17中的式（134），对任何 $n=1$，2，$\cdots$，有

$$P(\tau_n < \infty) = \lim_{t\to\infty} P(\tau_n \leqslant t) = \lim_{t\to\infty} 1 - e^{-\lambda t} = 1。$$

由 T_n 与 τ_n 的定义知 $T_n = \sum_{m=1}^{n} \tau_m$，$n=1$，2，$\cdots$，于是利用上面已证的结论便得

$$P(T_n < \infty) = P\left(\sum_{m=1}^{n} \tau_m < \infty\right) = P\left(\bigcap_{m=1}^{n} (\tau_m < \infty)\right) = 1。$$

既然 τ_1，τ_2，…是相互独立的随机变量序列，所以 $T_n=\sum_{m=1}^{n}\tau_m$ 与 τ_{n+1}，τ_{n+2}，…独立。

定理18 设 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是具有参数 $\lambda>0$ 的普阿松过程，T_n，$n=1, 2, \cdots$是它的逐次发生时间（或等待时间）序列，则第 n 次发生时间 T_n ($n=1, 2, \cdots$) 有概率密度函数。

$$f_{T_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0。\end{cases} \tag{136}$$

证 对任意给定的正整数 n，因为 T_n 非负，所以对任何 $t<0$，$F_{T_n}(t)=P(T_n\leqslant t)=0$，从而有 $F_{T_n}(t)=0$，$t<0$。

对任何 $t>0$，由 T_n 的定义及式 (115) 有

$$F_{T_n}(t)=P(T_n\leqslant t)=P(X_t\geqslant n)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}。$$

因为幂级数在它的收敛区间内部可以逐项求导，故由上式知存在

$$\begin{aligned}F'_{T_n}(t)&=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!}\lambda e^{-\lambda t}-\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\lambda e^{-\lambda t}\\ &=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},\quad t>0,\end{aligned}$$

由此可见 T_n 有如式 (136) 所给出的概率密度函数。

定理19 设 $X=\{X_t, t\geqslant 0\}$是具有参数 $\lambda>0$的普阿松过程，对任意给定的 $t>0$，ϕ_t 是如前面已定义的 X 的时间特征量。如果 ϕ_t 的分布函数是连续的，则 ϕ_t 的分布函数 $F_{\phi_t}(x)$与 t 无关，而且有

$$F_{\phi_t}(x)=P(\phi_t\leqslant x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0。\end{cases} \tag{137}$$

证 记 $G(x)=P(\phi_t>x)$，$x\geqslant 0$，又令 T 表示在 t 之后的头一个发生时间。那么 $\{\phi_t>x\}=\{T>t+x\}$，所以对任何 $x\geqslant 0$，$h>0$有

$$\begin{aligned}G(x+h)&=P(\phi_t>x+h)=P(T>t+x+h)\\ &=P(T>t+x\text{ 并在}[t+x, t+x+h]\text{ 中没有事件发生})\\ &=P(\phi_t>x, X_{t+x+h}-X_{t+x}=0)\end{aligned} \tag{138}$$

因为 $(\phi_t>x)=(\phi_t\leqslant x)^c$ 仅涉及到在时间 $t+x$ 以前发生的事件，所以由 X 的增量独立性及式 (116)，在 $h\to 0+$时，上式右方可表成为

$$\begin{aligned}G(x+h)&=P(\phi_t>x)P(X_{t+x+h}-X_{t+x}=0)\\ &=G(x)(1-\lambda h+0(h))。\end{aligned} \tag{139}$$

由此可见存在下列极限

$$\lim_{h\to 0+}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\lim_{h\to 0+}\left(-\lambda G(x)+\frac{0(h)}{h}\right)=-\lambda G(x)。 \tag{140}$$

同理，对任意的 $x>0$，$x>h>0$，只要将式 (138)、(139) 中的 $x+h$，x 分别依次用 x、

$x-h$ 代替，类似可得

$$\begin{aligned} G(x) &= P(\phi_t > x-h,\ X_{t+x} - X_{t+x-h} = 0) \\ &= G(x-h)(1-\lambda h + 0(h)), \end{aligned} \tag{141}$$

根据假设 $F_{\phi_t}(x)$ 是 x 的连续函数，那么 $G(x)=1-F_{\phi_t}(x)$ 也是 x 的连续函数，于是由式（141）知存在如下极限：

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+}\frac{G(x-h)-G(x)}{-h} &= \lim_{h\to 0+}\left(-\lambda G(x-h)+\frac{0(h)}{h}\right) \\ &= -\lambda G(x)。 \end{aligned} \tag{142}$$

由式（140）与（142）即可断定：

$$G'(x) = -\lambda G(x),\quad x \geqslant 0,$$

又显然 $G(0)=P(\phi_t>0)=1$。解此初值问题即得 $G(x)=e^{-\lambda x}$，$x\geqslant 0$。而 $P(\phi_t\leqslant x)=0$，$x<0$ 是显然的，式（137）得证。

定理20　设 $X=\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是具有参数 $\lambda>0$ 的普阿松过程，对任意给定的 $t>0$，ψ_t 是前面已定义的 X 的时间特征量。则 $P(\psi_t=t)>0$，并且

$$P(\psi_t \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x},\ 0 \leqslant x < t。 \tag{143}$$

证　如果在 $[0,\ t)$ 期间内没有事件发生，由 ψ_t 的定义及（132）得知

$$P(\psi_t = t) = P(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t} > 0。$$

如果在 $[0,\ t)$ 期间内至少有一个事件发生，那么对 $0\leqslant x<t$，有

$$P(\psi_t > x) = P(X_t - X_{t-x} = 0) = e^{-\lambda x}$$

式（143）得证。

对于具有参数 $\lambda>0$ 的普阿松过程 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$，任意给定的 $t>0$ 及 $0<s\leqslant t$。

$$\begin{aligned} P(\tau_1 < s \mid X_t = 1) &= P(\tau_1 < s,\ X_t = 1)/P(X_t = 1) \\ &= (\lambda t e^{-\lambda t})^{-1} P(X_s = 1,\ X_t - X_s = 0) \\ &= (\lambda t e^{-\lambda t})^{-1} \lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} = \frac{s}{t}。 \end{aligned} \tag{144}$$

这表明在 $X_t=1$ 的条件下 τ_1 或 T_1 的条件分布是 $[0,\ t]$ 上的均匀分布，这便揭示了均匀分布与普阿松过程之间存在着一定的联系，确切地说有以下一般的定理。

定理21　设 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是具有参数 $\lambda>0$ 的普阿松过程。对任意给定的时间间隔 $[0,t]$ 及任意的正整数 n，则在 $X_t=n$ 已发生的条件下，发生时间向量（T_1，T_2，…，T_n）的条件分布与皆服从 $[0,\ t]$ 上均匀分布的独立的随机变量 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 的顺序统计量 $\xi_{(1)}$，$\xi_{(2)}$，…$\xi_{(n)}$ 的联合分布相同。

证　由概率统计知识，（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）的联合密度函数为

$$f_{\xi_1\xi_2\cdots\xi_n}(u_1,u_2,\cdots,u_n) = \begin{cases} 1/t^n, & 0 \leqslant u_1,u_2,\cdots,u_n \leqslant t, \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

（$\xi_{(1)}$，$\xi_{(2)}$，…，$\xi_{(n)}$）的联合密度函数为

$$f_{\xi_{(1)}\xi_{(2)}\cdots\xi_{(n)}}(t_1,t_2,\cdots,t_n) = \begin{cases} n!/t^n, & 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \tag{145}$$

另一方面对任意的$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}=t$，及任意的$h_l>0$使得$t_l<t_l+h_l<t_{l+1}$，$l=1$，2，…，$n$，那么

$$
\begin{aligned}
&P(t_l \leqslant T_l \leqslant t_l+h_l,\ l=1,2,\cdots,n \mid X_t=n)\\
&=P(\text{在}[t_l,t_l+h_l]\text{内恰有一个事件发生},\ l=1,2,\cdots,n,\ \text{在}[0,t]\\
&\text{内的其它处再无事件发生})/P(X_t=n)\\
&=P(X_{t_1}-X_0=0,\ X_{t_l+h_l}-X_{t_l}=1,\ X_{t_{l+1}}-X_{t_l+h_l}\\
&=0,\ l=1,2,\cdots,n)/P(X_t=n)\\
&=P(X_{t_1}=0)\prod_{l=1}^{n}P(X_{t_l+h_l}-X_{t_l}=1)P(X_{t_{l+1}}-X_{t_l+h_l}=0)/P(X_t=n)\\
&=e^{-\lambda t_1}\prod_{l=1}^{n}e^{-\lambda h_l}(\lambda h_l)e^{-\lambda(t_{l+1}-t_l-h_l)}/e^{-\lambda t}(\lambda t)^n(n!)^{-1}\\
&=h_1h_2\cdots h_n\, n!/t^n
\end{aligned}
$$

故存在极限：当$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t$时，

$$
\lim_{h_1,\cdots,h_n\to 0+}\frac{P(t_l\leqslant T_l\leqslant t_l+h_l,\ l=1,2,\cdots,n\mid X_t=n)}{h_1h_2\cdots h_n}=\frac{n!}{t^n}。\tag{146}
$$

由此可见在$X_t=n$的条件下$(T_1, T_2, \cdots, T_n)$的条件概率密度函数与式（145）所示的一样，证完。

定理21提供了一种利用一事件组先后发生时间的条件分布来检验该事件组是否属于普阿松类型的方法。为了认清普阿松过程的基本结构，最后给出以下结论。

定理　22　设$\{y_n, n=1, 2, \cdots\}$是只取正值的随机变量序列，且$\sum_{n=1}^{\infty}Y_n=\infty$。对$t\geqslant 0$，令

$$
X_t\begin{cases}0, & t<Y_1,\\ n, & Y_1+\cdots+Y_n\leqslant t<Y_1+\cdots+Y_{n+1},\ n=1,2,\cdots,\end{cases}\tag{147}
$$

则下列命题互相等价：

(i)　$\{X_t, t\geqslant 0\}$是普阿松过程。

(ii)　$\{Y_n, n=1, 2, \cdots\}$是互相独立的并具有相同指数分布的随机变量序列。

(iii)　对任意的$t>0$，X_t服从参数为λt的普阿松分布。而且对任何$t>0$及任何正整数n，若记$T_n=Y_1+\cdots+Y_n$，则在$X_t=n$的条件下，$(T_1, T_2, \cdots, T_n)$的条件分布与定理21中所述的$(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \cdots, \xi_{(n)})$的联合分布相同。

定理22的严格证明可参看文献［4］。

在实际应用中还会遇到一些推广的普阿松过程，如非齐次普阿松过程、复合普阿松过程、过滤普阿松过程、更新过程等，它们的数学定义、实际背景、基本特性以及与普阿松过程之间的关系可参看文献［12］、［37］、［38］、［39］。

第九章　马尔科夫链的应用

马氏链作为描述一类实际问题的数学模型在众多的领域内已经取得了极为丰硕的成果。本章旨在通过较多的实例对此作一概要介绍，以这样一些事实来阐明马氏链的应用广泛性。随着马氏链理论与其它数学分支相互渗透、促进、共同发展的进程，考察它作为一种数学工具在解决实际问题的整个过程中所发挥的有力作用，不断产生出来的丰富思想，陆续创造出新的行之有效的方法以及富有推广实用价值的新成果，所有这一切都充分展现出马氏链理论的广阔应用前景。

§1　马尔科夫链在经济领域中的应用

一个庞大而复杂的经济系统一般总会受到多方面的不确定因素的影响，因此可将它看作为一个随机系统，而且这种系统的演变过程往往具有无后效性，这样便为利用马氏链理论对它进行定量分析提供了客观基础。为了控制经济系统的行为朝着预定目标运转，最重要的是要根据实时观测资料对某些刻画系统的关键定量指标进行统计分析，准确地预测其未来，以便我们从多种可供选择的方案中作出正确的或最优的决策。下面仅用几个简单的数字实例展示一下经济预测和决策中的马氏链方法。

例 1[41]　试对 A、B 两家毛巾厂生产的同类产品的市场销售趋势作一预测。假定毛巾的平均使用期为 3 年，每个厂家销售量的增减主要取决于毛巾的质量。1991 与 1992 两年市场需求销售调查如表 1 所示：

表 1　毛巾市场需求销售调查表

厂家	A 厂			B 厂		
销售量，A、B 两厂顾客流量 \ 时间	销售量（万条）	顾客流动人数		销售量（万条）	顾客流动人数	
		老顾客人数（万）	原购 B 厂毛巾现购 A 厂毛巾人数（万）		老顾客人数（万）	原购 A 厂毛巾现购 B 厂毛巾人数（万）
1991	200	160	40	300	280	20
1992	217	178.5	38.5	283	260.5	12.5

由此表可得 1991 年选购 A 厂或 B 厂产品的绝对概率为

$$p_A = 200/(200+300) = 0.4, \quad p_B = 300/(200+300) = 0.6$$

而 1991 年的顾客人数转移频数及相应的状态转移概率分别依次为

$$f_{AA}=160,\qquad f_{AB}=20,$$
$$f_{BA}=40,\qquad f_{BB}=280。$$
$$p_{AA}=160/(160+20)=0.889,\qquad p_{AB}=20/(160+20)=0.111,$$
$$p_{BA}=40/(40+280)=0.125,\qquad p_{BB}=280/(40+280)=0.875。$$

于是 1991 年的绝对概率分布与转移概率矩阵依次为

$$A_{1991}=[0.4,0.6],\qquad P_{1991}=\begin{bmatrix}0.889 & 0.111\\ 0.125 & 0.875\end{bmatrix}。$$

完全类似地由表 1 可算得 1992 年的绝对概率分布与转移概率矩阵依次为

$$A_{1992}=[0.434,0.566],\qquad P_{1992}=\begin{bmatrix}0.888 & 0.112\\ 0.129 & 0.871\end{bmatrix}。$$

比较 P_{1991} 与 P_{1992} 近似相等，因此该系统可以看作为一个齐次马氏链，取初始分布与转移概率矩阵为

$$A_0=[0.43,0.57],\qquad P=\begin{bmatrix}0.89 & 0.11\\ 0.13 & 0.87\end{bmatrix}。$$

计算 A_0P^n，$n=1$，2，3，即预测 A、B 两厂未来三年的毛巾销售量，表 2 列出了计算结果

表 2　预测三年销售量表

厂家 / 绝对概率 销售量 / 时间	A 厂		B 厂	
	绝对概率	销售量（万条）	绝对概率	销售量（万条）
1993	0.456	228	0.544	272
1994	0.476	238	0.523	262
1995	0.492	246	0.508	254

因为 P 中每个元素都是正值，所以该有限齐次马氏链必有唯一的平稳分布，求解

$$\begin{cases}\pi_A=0.89\pi_A+0.13\pi_B\\ \pi_B=0.11\pi_A+0.87\pi_B\\ 1=\pi_A+\pi_B\end{cases}$$

得：$\pi_A=0.54$，$\pi_B=0.46$，即（0.54，0.46）为平稳分布。从而 A 厂与 B 厂的最终毛巾销售量依次分别为：

$$M_A=500\times0.54=270(\text{万条}),\quad M_B=500\times0.46=230(\text{万条})$$

在市场竞争中 A 厂终于超过了 B 厂。

在一些经济系统中，随着它的状态逐步转移，常常还伴有一系列利润的转移。当系统由状态 i 经一步转到状态 j 时，获得的利润记作 r_{ij}，由全体 r_{ij}，i，$j\in S$(所有可能状态之集)构成的矩阵称为**利润矩阵**，并记为 $R=[r_{ij}]$，$r_{ij}>0$ 表示盈利，$r_{ij}<0$ 表示亏损，$r_{ij}=0$ 表示不亏不盈。在经济系统的演变进程中，因其状态的转移是随机的，故在每一阶段获取的利润也是随机的，而且利润取值的概率可由状态转移概率来确定。所以预测系统经 n 步转

移后获取的利润实际上就是预测它的期望(平均)利润。

例 2[40]　某开发公司每年最多能承包二项规模相同的工程。根据过去历年公司承包合同的统计资料分析，可得该公司承包合同数的转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix}p_{00} & p_{01} & p_{02}\\ p_{10} & p_{11} & p_{12}\\ p_{20} & p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.6\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\\ 0.3 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix},$$

其中 p_{ij}，i，$j\in\{0,1,2\}$ 表示该公司今年承包 i 项合同明年承包 j 项合同的概率。又与 P 相应的利润矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}r_{00} & r_{01} & r_{02}\\ r_{10} & r_{11} & r_{12}\\ r_{20} & r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20 & 10 & 20\\ -10 & 20 & 40\\ 10 & 40 & 60\end{bmatrix},\qquad(\text{单位:万元})$$

试预测该公司经 n 年后在工程承包中获取的期望利润。令 $V_i(n)$ 表示公司今年承包 i 项合同经 n 年后总的期望利润，又规定 $V_i(0)=0, i=0,1,2$，即设初始利润为零，显然有

$$V_i(1)=\sum_{j=0}^{2}p_{ij}r_{ij},\quad V_i(2)=\sum_{j=0}^{2}p_{ij}\left[r_{ij}+\sum_{k=0}^{2}p_{jk}r_{jk}\right]=\sum_{j=0}^{2}p_{ij}[r_{ij}+V_j(1)],$$

一般有以下递推公式

$$V_i(n)=\sum_{j=0}^{2}p_{ij}[r_{ij}+V_j(n-1)],\quad n=1,2,\cdots,\tag{1}$$

若记 $V(n)=[V_0(n),V_1(n),V_2(n)]'$，那么式 (1) 可表示为矩阵形式:

$$V(n)=V(1)+PV(n-1),\qquad n=1,2,\cdots。\tag{2}$$

利用此公式可以预测该公司今后三年的期望利润如下:

$$\begin{cases}V_0(1)=0.1\times(-20)+0.3\times 10+0.6\times 20=13(\text{万元}),\\ V_1(1)=0.3\times(-10)+0.3\times 20+0.4\times 40=19(\text{万元}),\\ V_2(1)=0.3\times 10+0.1\times 40+0.6\times 60=43(\text{万元})。\end{cases}$$

$$\begin{aligned}V(2)&=V(1)+PV(1)\\ &=\begin{bmatrix}13\\19\\43\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.6\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\\ 0.3 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\19\\43\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45.8\\45.8\\74.6\end{bmatrix}\quad(\text{万元})。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(3)&=V(1)+PV(2)\\ &=\begin{bmatrix}13\\19\\43\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.6\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\\ 0.3 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}45.8\\45.8\\74.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}76.08\\76.32\\106.08\end{bmatrix}\quad(\text{万元})。\end{aligned}$$

在综合平衡国民经济各部门之间的生产与分配的联系上，投入产出分析是常用的数学模型。为了使模型能够适应不断变化的实际情况，可以借助马氏链理论实时修正原来的模型，进而探讨经济结构的最终稳定性能。参看下面的例示。

例 3[41]　表 3 是一价值形投入产出表。表中列出国民经济分甲、乙两个部门，甲部门产品的总产值为 676 亿元，其中用于本部门产品 201 亿元，用于乙部门产品 195 亿元、用于积累 56 亿元，用于消费 224 亿元；乙部门产品总产值为 312 亿元，其中用于甲部门产品、本部门产品、积累和消费分别依次为 147、46、23、96 亿元。在两个部门产品的生产中，甲

部门产品需消耗本部门产品、乙部门产品及折旧分别依次为201、147、162亿元，新创造价值166亿元；乙部门产品需消耗甲部门产品、本部门产品及折旧分别依次为195、46、30亿元，新创造价值为41亿元。

表3 价值形投入产出表（报告期） 单位：亿元

	中间产品		最终产品		总产值
	部门甲	部门乙	积累	消费	
部门甲	201 (0.297)	195 (0.625)	56 (0.455)	224 (0.668)	676
部门乙	147 (0.217)	46 (0.148)	23 (0.187)	96 (0.287)	312
折旧	162 (0.240)	30 (0.096)	44 (0.358)	15 (0.045)	251
新创造价值	166 (0.246)	41 (0.131)	0 (0)	0 (0)	207
总产值	676	312	123	335	

注：圆括号内数字为直接消耗系数。

若以 X_j 表示第 j 部门的总产值，以 X_{ij} 表示第 j 部门消耗第 i 部门的产品价值，或者说第 i 部门分配给第 j 部门的产品价值，则称 $a_{ij}=\dfrac{X_{ij}}{X_j}$ 为第 j 部门对第 i 部门的**直接消耗系数**，它表示第 j 部门生产单位价值产品直接消耗第 i 部门的产品价值。现在计算出投入产出表3的直接消耗系数矩阵 A，A 的转置矩阵 A' 称为**比例系数矩阵**：

$$A'=\begin{bmatrix}0.297 & 0.217 & 0.240 & 0.246\\ 0.625 & 0.148 & 0.096 & 0.131\\ 0.455 & 0.187 & 0.358 & 0\\ 0.668 & 0.287 & 0.045 & 0\end{bmatrix}。$$

显然 A' 是随机矩阵。每当要直接利用 A 进行预测或编制计划时，必须考虑因为技术进步，经济结构或投入结构的变化而造成 A 的相应变化，是否需要对 A 作适当的修正，以保证预测结果和编制计划的质量。譬如根据观测资料经过统计分析得知：部门甲的产品生产，在上年度对甲部门产品的消耗中，本年度仍有90%消耗甲部门的产品，其余的有4%转移消耗乙部门产品，有2%和4%转为由折旧和新创造价值作为投入；在上年度对乙部门产品的消耗中，本年度仍有86%消耗乙部门产品，其余有9%转移消耗甲部门产品，有3%和2%转为由折旧和新创造价值构成；类似地积累和消费两列的变化分别依次为70%，20%，10%，0%，和10%，84%，6%，0%，因此得到如下转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0.9 & 0.04 & 0.02 & 0.04\\ 0.09 & 0.86 & 0.03 & 0.02\\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.84 & 0.06 & 0\end{bmatrix}。\tag{3}$$

于是本年度的比例系数矩阵预测如下：

$$A'P = \begin{bmatrix} 0.47943 & 0.45314 & 0.05121 & 0.01622 \\ 0.65612 & 0.28152 & 0.0344 & 0.02796 \\ 0.67693 & 0.25062 & 0.05051 & 0.02194 \\ 0.65853 & 0.28254 & 0.02647 & 0.03246 \end{bmatrix},$$

若转移矩阵 P 不变，依此还可预测两年、三年以及更长时期的直接消耗系数矩阵，从而对经济结构的变化、中间产品价值、最终产品价值、总产值等作出预测。

以式(3)中的 P 为转移矩阵的齐次马氏链是不可分的非周期的，必有平稳分布 $\pi=[\pi_1,\cdots,\pi_4]$。解线性代数方程：

$$\pi P = \pi, \qquad \sum_{i=1}^{4}\pi_i = 1,$$

得 $\pi=[0.29, 0.61, 0.044, 0.049]$。既然当 $n\to\infty$ 时 P^n 趋于稳态，那么相应的直接消耗系数矩阵也趋于稳态，从而可预测经济结构的稳定状态。

在准确预测的基础之上便可对多种不同的行动方案作出决策。在经济问题的决策中常以期望利润最高或期望损失最小等作为评价方案优劣的指标。

例 4[40] 如例 2 所述，为了获取最大的利润，经营决策者可采取若干行动方案，譬如当公司没有承包到合同时，可以登广告作宣传或进行业务联系，争取下一年承包到合同的可能，当仅承包到 1 项合同时，为扩大业务，可采取技术革新的方案。当已承包有 2 项合同时，为了避免减少承包合同数目的可能，而采用维修设备、增加工人福利等方案。所有这些方案的实施都要支付一定的经费，因此期望利润一般会有所降低。所以无论采取哪种行动方案，都会造成支配承包合同过程的概率和利润结构发生相应的改变，那么决策者究竟选择哪种方案为好呢？为此可经过以下步骤作出决策。

(i) 列出行动方案表

决策者对承包合同项数的每种状态分别采用表 4 所列的相应不同的行动方案。

表 4 行动方案表

承包合同数 i	0	1	2
行动方案 k	1. 不登广告 2. 登广告	1. 不进行革新 2. 进行革新	1. 不维修设备，不增加福利 2. 维修设备，增加福利

用 p_{ij}^k 与 r_{ij}^k，$k=1,2$ 分别依次表示在采取行动方案 k 之下从状态 i 到状态 j 的转移概率与所获得的利润。当取行动方案 k 都为 1 时，相应的转移概率矩阵与利润矩阵在例 2 中已给出，即依次为

$$\begin{bmatrix} p_{00}^1 & p_{01}^1 & p_{02}^1 \\ p_{10}^1 & p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{20}^1 & p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r_{00}^1 & r_{01}^1 & r_{02}^1 \\ r_{10}^1 & r_{11}^1 & r_{12}^1 \\ r_{20}^1 & r_{21}^1 & r_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 10 & 20 \\ -10 & 20 & 40 \\ 10 & 40 & 60 \end{bmatrix}。$$

当取行动方案 k 都为 2 时，相应的转移概率矩阵与利润矩阵由该公司根据以往资料进行统计分析得到

$$\begin{bmatrix} p_{00}^2 & p_{01}^2 & p_{02}^2 \\ p_{10}^2 & p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{20}^2 & p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.15 & 0.8 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r_{00}^2 & r_{01}^2 & r_{02}^2 \\ r_{10}^2 & r_{11}^2 & r_{12}^2 \\ r_{20}^2 & r_{21}^2 & r_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 8 & 16 \\ -12 & 18 & 36 \\ 8 & 36 & 55 \end{bmatrix}。$$

于是按照在各种行动方案 k 之下的明年期望利润公式：

$$V_i^{(k)}(1)=\sum_{j=0}^{2}p_{ij}^k r_{ij}^k,\qquad i=0,1,2,\quad k=1,2, \tag{4}$$

将有关数值分别代入计算，即得表 5 所列的结果。

表 5 明年期望利润表

承包合同数 i	行动方案 k	转移概率			利 润			明年期望利润 $V_i^k(1)$
		p_{i0}^k	p_{i1}^k	p_{i2}^k	r_{i0}^k	r_{i1}^k	r_{i2}^k	
0	1. 不登广告	0.1	0.3	0.6	−20	10	20	13
	2. 登广告	0.05	0.15	0.8	−22	8	16	12.9
1	1. 不进行革新	0.3	0.3	0.4	−10	20	40	19
	2. 进行革新	0.1	0.2	0.7	−12	18	36	27.6
2	1. 不维修设备，不增加福利	0.3	0.1	0.6	10	40	60	43
	2. 维修设备，增加福利	0.1	0.2	0.7	8	36	55	46.5

(ii) 进行决策

现在寻求今后 n 个年内获取最大利润的决策。显然今后 n 年内的总期望利润是 n 的函数。

记 $d_i(l), i=0,1,2, l=1,2,\cdots,n$ 是第 l 年承包合同项数为 i 的决策。当 $d_i(l)$ 对一切 i、l 的值都已确定时，那么在这 n 年内的策略也就被确定。相对于给定的 i 与 n，使总期望利润达到最大的策略称为**最优决策**。

记 $V_i^*(n), i=0,1,2, n=1,2,\cdots$ 为从状态 i 开始，经过 n 年并使用最优决策的总期望利润。于是有

$$V_i^*(n)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{j=0}^{2}p_{ij}^k[r_{ij}^k+V_j^*(n-1)],\qquad i=0,1,2,\quad n=1,2,\cdots。 \tag{5}$$

自然可假定初始期望利润为零，即 $V_i^*(0)=0, i=0,1,2$。由此，利用已给的数据便可递推地求出 $d_i(l), i=0,1,2, l=1,2,\cdots,n$。具体计算如下：

$$V_0^*(1)=\max\left(\sum_{j=0}^{2}p_{0j}^1 r_{0j}^1,\sum_{j=0}^{2}p_{0j}^2 r_{0j}^2\right)=\max(13.0,12.9)=13.0,$$

所以 $d_0(1)=1$。

$$V_1^*(1)=\max\left(\sum_{j=0}^{2}p_{1j}^1 r_{1j}^1,\sum_{j=0}^{2}p_{1j}^2 r_{1j}^2\right)=\max(19,27.6)=27.6,$$

所以 $d_1(1)=2$。

$$V_2^*(1)=\max\left(\sum_{j=0}^{2}p_{2j}^1 r_{2j}^1,\sum_{j=0}^{2}p_{2j}^2 r_{2j}^2\right)=\max(43,46.5)=46.5,$$

所以 $d_2(1)=2$。

进一步再按公式：

$$V_i^*(2)=\max\left(\sum_{j=0}^{2}p_{ij}^1[r_{ij}^1+V_j^*(1)],\sum_{j=0}^{2}p_{ij}^2[r_{ij}^2+V_j^*(1)]\right),\quad i=0,1,2,$$

计算得

$$V_0^*(2)=\max(50.48,54.89)=54.89，故\ d_0(2)=2。$$

$$V_1^*(2)=\max(49.78,66.97)=66.97，故\ d_1(2)=2。$$

$$V_2^*(2)=\max(77.56,85.87)=85.87，故\ d_2(2)=2。$$

类似地可以递推算出 $d_0(3),d_1(3),d_2(3),\cdots$，汇总数字结果于表 6 中。

表 6　总期望利润及其策略表

n	1	2	3	4	
$V_0^*(n)$	13.0	54.89	94.386	134.001 7	
$V_1^*(n)$	27.6	66.97	106.592	146.210 4	
$V_2^*(n)$	46.5	85.87	125.492	165.101 4	
$d_0(n)$	1	2	2	2	
$d_1(n)$	2	2	2	2	
$d_2(n)$	2	2	2	2	

由表 6 可知：如果今年该公司没有承包到工程，那么经过 4 年后，在此期间可获得的最大利润是 134 万元，其最优策略是登广告。其它情形可作类似的解释。例 4 介绍的方法其实就是霍华德（Howard）提出的马尔科夫序贯决策的迭代优化法[42]。

例 5　某公司经管机构由经理 M、与副经理 V、经理秘书 M_s 与副经理秘书 V_s 四人组成，洽谈生意仅由一位成员接待，该成员可以独自执行这项任务，也可把它转给另一位成员处理，甚至还可能将此任务放在一边永不执行。现在把完成任务与将任务放在一边永不执行依次分别看作为两个吸收状态 a 和 b，将四位成员 M、V、M_s、V_s 看作为四个非吸收状态，根据这四人日常工作的规律：经理喜欢把项目分转给他的秘书或副经理。副经理习惯于把他收到的项目的 3/4 转给他的秘书，剩下的由他亲自完成或放在一边。每个秘书自己完成收到项目的 3/8，放在一边的占 1/8，其余的一半送给另一秘书，一半还给他的经理，以获取进一步指示。可借助转移概率矩阵 P 来描绘以上所述的规律，容易写出 P 及其子矩阵 R，Q 如下：

$$P=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ M\\ V\\ M_s\\ V_s\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} a & b & M & V & M_s & V_s\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 3/4\\ 3/8 & 1/8 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4\\ 3/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0\end{bmatrix}\end{array},\qquad R=\begin{array}{c} \\ M\\ V\\ M_s\\ V_s\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} a & b\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1/8 & 1/8\\ 3/8 & 1/8\\ 3/8 & 1/8\end{bmatrix}\end{array},$$

$$Q=\begin{array}{c} \\ M\\ V\\ M_s\\ V_s\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} M & V & M_s & V_s\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3/4\\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0\end{bmatrix}\end{array}。$$

由此经计算可得：

$$(I-Q)^{-1}=\begin{array}{c}\\ M\\ V\\ M_s\\ V_s\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}M & V & M_s & V_s\end{array}\\ \begin{bmatrix}1.2 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 0.075 & 1.3 & 0.3 & 1.05\\ 0.325 & 0.3 & 1.3 & 0.55\\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 1.4\end{bmatrix}\end{array},\quad (I-Q)^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{array}{c}M\\ V\\ M_s\\ V_s\end{array}\begin{bmatrix}3.6\\ 2.725\\ 2.475\\ 2.3\end{bmatrix},$$

$$(I-Q)^{-1}R=\begin{array}{c}\\ M\\ V\\ M_s\\ V_s\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}a & b\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.67 & 0.33\\ 0.73 & 0.27\\ 0.725 & 0.275\end{bmatrix}\end{array}。\tag{6}$$

由Ⅵ. 定理3与Ⅵ. 定理4知 $(I-Q)^{-1}[1,1,1,1]'$ 与 $(I-Q)^{-1}R$ 分别依次表示从状态 M、或 V、或 M_s、或 V_s 出发平均吸收时间与吸收概率。在与公司商谈交易时，式（6）中所给出的具体数值能够帮助我们作出决策。譬如最好选择与经理秘书接洽，因为相比之下在他手上生意被搁置一边的概率（0.27）最小。最好不要与副经理接洽，因为相比之下在他手上完成交易的可能性（0.67）最小。具体经办时最好交给副经理秘书办理，因为相比之下他完成此任务所需的平均时间最短，若交给经理办理那是最缓慢的。

§2　马尔科夫链在生命科学中的应用

在生命科学中所遇到的现象一般是受到遗传因素、生存环境等许多不确定因素影响的相当复杂的随机现象。无论是群体增长、群体迁移、对抗群体之间的生存竞争、群体中传染病流行、种群灭绝等宏观或外表的现象，还是遗传基因的变异、细菌繁殖、辐射对生物体的效应等微观或内在的现象都是如此。在建立近似描述这些生命现象的数学模型中，在帮助人们定量分析这类现象或认识理解其生理机制方面，马氏链理论起到了重要的工具作用。

例6　（**分支过程-群体增长或消亡模型**）现在来建立描述一种群体繁殖增长或消亡减少的随机数学模型，以 X_0 表示开始群体所含个体的个数，称作第零代的个体数。第零代的后代为第一代，第一代的个体数记为 X_1，依此类推，第 n 代是第 $n-1$ 代的后代，第 n 代的个体数记为 X_n。假定无论哪一代中的每一个体所产生后代的个数都是服从同一分布的随机变量 ξ，共同分布记作

$$P(\xi=k)=g_k,\qquad k=0,1,2,\cdots。\tag{7}$$

又假定同一代中各个个体所产生的后代个数是相互独立的随机变量，而且它们与群体以前的繁殖或消亡过程也是相互独立的。第 $n-1$ 代产生了第 n 代之后便自行消亡。$\{X_0,X_1,\cdots,X_n,\cdots\}$ 描述了这种群体的繁殖或消亡过程。下面将给出该模型的严格数学定义。

设 $\{\xi_m^{(n)},n,m=1,2,\cdots\}$ 是相互独立的具有共同分布（7）的取非负整数为值的随机变量族，X_0 是与 $\{\xi_m^{(n)},n,m=1,2,\cdots\}$ 相互独立的取非负整数为值的随机变量，对任何正整数 n，令

$$X_n=\begin{cases}\xi_1^{(n)}+\xi_2^{(n)}+\cdots+\xi_{X_{n-1}}^{(n)}, & \text{当 } X_{n-1}\geqslant 1,\\ 0, & \text{当 } X_{n-1}=0。\end{cases} \tag{8}$$

则称 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 为**离散参数的分支过程**。

由假设条件知：如果已知 $X_{n-1}=i\geqslant 1$，由式（8），X_n 的分布是 i 个相互独立的同分布随机变量之和的分布，即被完全确定，实际上这时 $X_n=\xi_1^{(n)}+\cdots+\xi_i^{(n)}$ 与 $\{X_0,\cdots,X_{n-1}=i\}$ 相互独立。如果已知 $X_{n-1}=0$，由式（8）$X_n=0$。总之 X_n 的分布只与 X_{n-1} 的取值有关，在给定 X_{n-1} 的取值之下；X_n 与 X_0，…，X_{n-2} 独立，所以 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 是一状态空间 S 为 $\{0,1,\cdots\}$ 的离散参数马氏链，而且“0”是吸收状态。

进而借助概率分布的母函数这一工具来寻求分支过程的转移概率及灭绝概率　记 $G(z)$ 为式（7）分布的母函数，即

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k。 \tag{9}$$

若分支过程 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 的 n 步转移概率为 $p_{ij}^{(n)}, i,j\in S(n=1,2,\cdots)$，记分布 $\{p_{ik}^{(n)}, k\in S\}$ 的母函数为

$$F_{in}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} z^k,\quad i\in S, n=1,2,\cdots。 \tag{10}$$

如果 $X_0=i$，那么 $\{p_{ik}^{(n)}, k\in S\}$ 就是 X_n 的分布，故 $F_{in}(z)$ 就是 X_n 的母函数。特别地记 $F_{i0}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(0)} z^k=z^i$。

定理 1　设 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 是分支过程，$X_0=i\geqslant 1$，$G(z)$，$F_{in}(z)$ 如式（7）、（9）、（10）所定义，记 $\mu_n=EX_n$，$\sigma_n^2=DX_n$，$\mu=G'(1)$，$\sigma^2=G''(1)+G'(1)-(G'(1))^2$，还记 $G^{(n)}(z)=\underbrace{G(G(\cdots G(z))\cdots)}_{n\text{次}}$，则有

(i)　对 $i\in S-\{0\}$，

$$F_{in}(z)=F_{i,n-1}(G(z))=[G^{(n)}(z)]^i, n=1,2,\cdots。 \tag{11}$$

特别地　有　$F_{i1}(z)=(G(z))^i$，$F_{1n}(z)=F_{1,n-1}(G(z))=G^{(n)}(z)$，$F_{1,n+1}(z)=G^{(n+1)}(z)=G(G^{(n)}(z))=G(F_{1n}(z)), n=1,2,\cdots$。

(ii)　$\mu_n=i\mu^n, n=1,2,\cdots, i\in S-\{0\}$。 (12)

(iii) 对 $n=1$，2，…，

$$\sigma_n^2=\begin{cases}\dfrac{i\sigma^2\mu^n(\mu^n-1)}{\mu^2-\mu}, & \text{当 } \mu\neq 1,\\ in\sigma^2, & \text{当 } \mu=1。\end{cases} \tag{13}$$

特别地 $\sigma_1^2=i\sigma^2$。

证　利用随机多个相互独立的随机变量之和的母函数的性质，由分支过程的定义与式（8），以及在 $X_0=1$ 的条件下 X_n 的母函数为 $F_{1n}(z)$，ζ 的母函数为 $G(z)$，从而有

$$\begin{aligned}F_{1n}(z)&=F_{1,n-1}(G(z))=F_{1,n-2}(G(G(z)))=\cdots\\&=F_{10}(G^{(n)}(z))=G^{(n)}(z)。\end{aligned} \tag{14}$$

一般地在 $X_0=i\geqslant 1$ 时，X_n 便是 i 个第零代个体各自衍生的第 n 代个体之和，按照假定这 i 个第零代个体的繁殖增长或消亡减少是相互独立的。再利用有限多个相互独立的随机

变量之和的母函数的性质及式（14）便得

$$F_{in}(z)=[F_{1n}(z)]^i=[G^{(n)}(z)]^i.$$

由此

$$F_{i,n-1}(G(z))=[G^{(n-1)}(G(z))]^i=[G^{(n)}(z)]^i。$$

故式（11）成立，(i) 得证。

因为非负整值随机变量的数学期望等于它的母函数在 1 处的导数值，于是由式（11）及 $G(1)=1$ 有

$$\begin{aligned}\mu_n=F'_{in}(1)&=[F_{i,n-1}(G(z))]'_{z=1}=F'_{i,n-1}(G(z))\mid_{z=1}G'(1)\\&=F_{i,n-1}{}'(1)G'(1)=F'_{i,n-2}(1)(G'(1))^2=\cdots\\&=F_{i,0}{}'(1)(G'(1))^n=i(G'(1))^n=i\mu^n。\end{aligned}$$

式（12）成立，(ii) 得证。

因为非负整值随机变量的方差可用它的母函数在 1 处的一阶和二阶导数值表示为

$$\sigma_n^2=DX_n=F''_{in}(1)+F'_{in}(1)-(F'_{in}(1))^2。$$

经过对式（11）的求导运算可得递推关系式：

$$F''_{in}(1)=F''_{i,n-1}(1)\mu^2+i(\sigma^2-\mu+\mu^2)\mu^{n-1},$$

由此作递推计算，并将结果代入 σ_n^2 的表达式中可算得式（13），详细的推导见文献 [6]。

注 由定理 1 中的式（11）知：理论上分支过程的任意步转移概率由 $G(z)$ 所确定。然而真要由此来算出 $p_{ij}^{(n)}$ 的明显表达式是较困难的。利用式（12）及式（13）计算 X_n 的期望与方差是容易的，也是实用的。

显而易见，若式（7）中之 $g_0=1$，则以概率 1 有 $X_n=0$，$n=1, 2, \cdots$，这是毫无意义的。若 $g_0=0$ 这表示每个个体至少要产生一个后代，如果又 $g_1=1$，那么群体所含个体总数每一代都始终保持定值不变，这是一种平凡情形。若 $g_0=0$ 且 $g_1<1$，那么第一代至第 n 代中每个个体始终只产生一个后代的概率 g_1^n 随着 $n\to\infty$ 而趋于零。因此群体中个体的总数只增不减将趋于无穷。因此以后总假设 $0<g_0<1$。这时由式（9）、式（10）与式（11）知：对任何 $i\in S-\{0\}$ 有

$$p_{i0}=F_{i1}(0)=[G(0)]^i=g_0^i>0。$$

这表明 $i\to 0$，但是 0 是吸收状态，故 $0\not\to i$，即 $i(\in S-\{0\})$ 是非本质状态。于是自然要问相应的分支过程从状态 $i(\neq 0)$ 出发被唯一的吸收状态 0 吸收的概率 f_{i0} 是多少。换言之，即要求开始含有 i 个个体的群体迟早要灭绝的概率，为保护这种群体这当然是人们最关心的问题。

对分支过程 $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$，既然 0 是吸收状态，那么必有 $\{X_n=0\}\subset\{X_{n+1}=0\}$，在 $X_0=i\geqslant 1$ 的初始条件下，$p_{i0}^{(n)}=P(X_n=0)$ 是 n 的单调不减函数，而且 $p_{i0}^{(n)}=P(X_n=0|X_0=i)$ 表示开始群体所含个体数为 i 的条件下在第 n 代之前群体灭绝的概率，因此该群体迟早要灭绝的概率为

$$f_{i0}=\lim_{n\to\infty}p_{i0}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}P(X_n=0),i\in S-\{0\}。\tag{15}$$

由式（10）与式（11），对 $i\in S-\{0\}$ 有

$$p_{i0}^{(n)}=F_{in}(0)=(F_{1n}{}^{(0)})^i=(p_{10}{}^{(n)})^i,\quad n=1,2,\cdots。\tag{16}$$

于是从式（15）与式（16）得

$$f_{i0} = \lim_{n\to\infty} p_{i0}^{(n)} = \lim_{n\to\infty}(p_{10}^{(n)})^i = (\lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n)})^i = (f_{10})^i, \quad i \in S - \{0\}。 \tag{17}$$

因此为了寻求 f_{i0}，只要求得 f_{10}就足够了。

定理 2　设 $\{X_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是分支过程，$X_0 = 1$，$G(z)$ 是式 (9) 所定义的幂级数，由幂级数运算性质，$G(z)$ 在$[0,1)$ 上有连续的导函数 $G'(z)$，设 $\mu = G'(1) = \lim\limits_{z\to 1-0} G'(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kg_k$，则对分支过程的灭绝概率 f_{10}有

(i)　$f_{10} = G(f_{10})$。　(18)

(ii)　当 $\mu \leqslant 1$，$g_1 < 1$ 时，必有 $f_{10} = 1$。

(iii)　当 $1 < \mu \leqslant \infty$时，f_{10} 是 $z = G(z)$ 在$[0,1)$ 内的唯一解。

证　在 $X_0 = 1$ 的假定下，X_n 的母函数为 $F_{1n}(z)$，而 X_1 的母函数 $F_{11}(z) = G(z)$，并注意到式 (16)，便有

$$p_{10}^{(1)} = g_0 = G(0),$$

$$p_{10}^{(n+1)} = P(X_{n+1} = 0 | X_0 = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 = k, X_{n+1} = 0 | X_0 = 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{1k}\, p_{k0}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k (p_{10}^{(n)})^k = G(p_{10}^{(n)})。 \tag{19}$$

在式 (19) 两边，令 $n\to\infty$，由 $G(z)$ 的连续性得

$$f_{10} = \lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} G(p_{10}^{(n)}) = G(\lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n)}) = G(f_{10})。$$

故式 (18) 成立，(i) 得证。

现在证 (ii)，首先设 $\mu \leqslant 1$，$g_0 + g_1 < 1$，那么由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k = 1$，知$\{g_k, k = 2,3,\cdots\}$ 中至少有一者为正值，因此

$$G'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kg_k z^{k-1}$$

在区间$[0,1)$ 上必是严格单调上升的函数。又由假设 $\mu = G'(1) = \lim\limits_{z\to 1-0} G'(z)$，所以有

$$\mu > G'(z), \qquad z \in [0,1)。 \tag{20}$$

倘若 $f_{10} < 1$，利用中值定理及式 (18)，必存在 $C \in (f_{10}, 1)$ 使

$$G'(c) = \frac{G(1) - G(f_{10})}{1 - f_{10}} = \frac{1 - f_{10}}{1 - f_{10}} = 1, \tag{21}$$

于是从式 (20) 与式 (21) 可得 $\mu > G'(c) = 1$，这与假设 $\mu \leqslant 1$ 矛盾，故 $f_{10} = 1$。

再设 $\mu \leqslant 1$，$g_0 + g_1 = 1$，而 $g_1 < 1$ 时，那么 $g_2 = g_3 = \cdots = 0$，由式 (9) 及式(11) 之特例便有

$$G(0) = g_0,\ F_{11}(0) = G(0) = g_0,\ F_{12}(0) = G(G(0)) = G(g_0) = g_0(1 + g_1)。$$

$$F_{1,n+1}(0) = G(F_{1n}(0)) = g_0(1 + g_1 + \cdots + g_1^n) = g_0 \frac{1 - g_1^{n+1}}{1 - g_1}, \quad n = 1,2,\cdots。$$

故

$$f_{10} = \lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} F_{1,n+1}(0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} g_0 \frac{1 - g_1^{n+1}}{1 - g_1} = \frac{g_0}{1 - g_1} = 1。$$

最后两等号成立是因为 $g_1 < 1$，$g_0 + g_1 = 1$。(ii) 得证。

最后证 (iii)。设 $1 < \mu \leqslant \infty$，既然 $\mu = G'(1) = g_1 + 2g_2 + 3g_3 + \cdots$，倘若 $g_0 + g_1 = 1$，

那么 $g_2=g_3=\cdots=0$，从而 $\mu=g_1\leqslant g_0+g_1=1$，这与 $\mu>1$ 的假设矛盾，故必有 $g_0+g_1<1$，从而如前面已论证的 $G'(z)$ 是[0,1)上严格单调上升的函数。再由假设 $\lim\limits_{z\to 1-0} G'(z)=\mu>1$ 便知：存在 $b<1$ 使得 $G'(b)>1$。对任何 $z\in(b,1)$，利用中值定理必存在 c，使得 $b<z<c<1$，且

$$\frac{G(1)-G(z)}{1-z}=G'(c)>G'(b)>1。$$

因为 $G(1)=1$，所以由上式便得

$$G(z)<z, \qquad z\in(b,1)。 \tag{22}$$

在所给的假设条件下，$G(z)$ 是 z 的严格单调上升函数，于是由式(22)知：对任何 $z\in(b,1)$ 有

$$z>G(z)>G(G(z))>\cdots>G(G^{(n)}(z))=G^{(n+1)}(z),$$

在上式中令 $z\to b+0$，利用 $G(z)$ 从而 $G^{(n+1)}(z)$ 的连续性及式(14)得

$$b\geqslant G^{(n+1)}(b)=F_{1,n+1}(b)。$$

再由 $G(z)$ 从而 $G^{(n+1)}(z)=F_{1,n+1}(z)$ 的严格单调上升性，有

$$f_{10}=\lim_{n\to\infty}F_{1,n+1}(0)\leqslant\limsup_{n\to\infty}F_{1,n+1}\leqslant b<1。$$

在(i)中已证明了 $f_{10}=G(f_{10})$，因此 f_{10} 是 $z=G(z)$ 在[0,1)内的一个解。

再证 f_{10} 是 $z=G(z)$ 在[0,1)内的唯一解，倘若 u_1、u_2 是 $z=G(z)$ 在[0,1)内的两个不同解。不妨设 $0\leqslant u_1<u_2<1$，利用中值定理必存在 $z_1\in(u_1,u_2)$，$z_2\in(u_2,1)$ 使得

$$G'(z_1)=\frac{G(u_2)-G(u_1)}{u_2-u_1}=\frac{u_2-u_1}{u_2-u_1}=1,$$

$$G'(z_2)=\frac{G(1)-G(u_2)}{1-u_2}=\frac{1-u_2}{1-u_2}=1,$$

所以 $G'(z_1)=G'(z_2)$。然而 $0<z_1<z_2<1$，又已知 $G'(z)$ 在[0,1)内是严格单调上升的，这便导致矛盾，即 $z=G(z)$ 在[0, 1)内不可能有两个不同解。定理证完。

注 1 由式(12)，当 $X_0=1$，$\mu>1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}EX_n=\lim_{n\to\infty}\mu^n=\infty。$$

这表示群体中的个体数随着逐代繁衍将趋于无穷，这时灭绝概率 f_{10} 当然不可能为 1，因此 $\mu\leqslant 1$ 是 $f_{10}=1$ 的必要条件。又当 $g_1=1$ 时，此群体以概率 1 将永远只含一个个体，当然这时 $f_{10}=0$，故 $g_1<1$ 也是 $f_{10}=1$ 的必要条件，于是结合定理 2 之(ii)知：$\mu\leqslant 1$ 且 $g_1<1$ 是 $f_{10}=1$ 即群体必定灭绝的充要条件。因此当 $\mu>1$ 时，必有 $f_{10}<1$。

注 2 已知 0 是吸引状态，如果 $g_0>0$，$X_0=j\geqslant 1$，那么分支过程从状态 j 出发返回 j 的概率至少要小于或等于 $1-g_0^j<1$，故 $j(\in S-\{0\})$ 是非常返状态。再由 Ⅱ．定理 1 知 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$，$i\in S$，这表示在 $n\to\infty$ 时群体所含个体数为任一正整数 j 的概率皆为零。既然已知在 $X_0=i\geqslant 1$ 的条件下群体迟早要灭绝的概率是 $(f_{10})^i$，那么群体的个体数必以概率 $1-(f_{10})^i$ 趋向无穷。因此当 $\mu>1$ 时，从而保证 $f_{10}<1$，如果 $f_{10}>0$，而且 i 很大，那么 $(f_{10})^i$ 很小，$1-(f_{10})^i$ 近似于 1，群体的个体数将以近于 1 的概率趋向无穷。

例 7 （**传染病流行模型**）现在要对一种比较温和的如上呼吸道疾病在一个有限群体中传染流行的过程建立适当的数学模型。假定受传染的个体并不通过隔离、复原或死亡而从群体中排除，并且群体是均匀混合的。设群体所含个体数为 $n+1$。令 $X_t(t\geqslant 0)$ 表示于时刻

t 在该群体中可感染的个体数，当然 X_t 是一随机变量。又令 $X_0=n$，这表示在传染开始时群体中只有一个个体已被感染。记 $p_j(t) = P(X_t = j), j = 0,1,\cdots,n, t \geqslant 0$。在 $X_t=j$ 之下群体在时间区间 $(t, t+\Delta t)$ 内将发生一个新的传染病例的概率令为 $\mu j(n-j+1)\Delta t + o(\Delta t)$，其中 μ 是一正常数。由于 X_t 的取值只能随时间的推移而逐渐减小，因此该模型 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 实际上是一个具有有限多个状态的纯灭过程，消亡率 $\mu_j = \mu j(n-j+1)$。

在上述假定下，利用关于纯灭过程的柯氏向前微分方程组，可得

$$\begin{cases} p_j'(t) = (j+1)(n-j)p_{j+1}(t) - j(n-j+1)p_j(t), & j = 0,1,\cdots,n-1, \\ p_n'(t) = -np_n(t)。 \end{cases} \tag{23}$$

而且方程组 (23) 的初始条件应为

$$p_j(0) = \begin{cases} 1, & \text{当 } j = n, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \tag{24}$$

文献 [43] 利用拉普拉斯 (Laplace) 变换与逆变换得到下面的结果：当 n 是偶正整数，且 $j > \frac{n}{2}$ 时，有

$$p_j(t) = \sum_{i=1}^{n-j+1} a_{ji} \exp[-i(n-i+1)t], \quad t \geqslant 0。 \tag{25}$$

其中

$$a_{ji} = \frac{(-1)^{i-1}(n-2i+1)n!(n-j)!(j-i-1)!}{j!(i-1)!(n-i)!(n-j-i+1)!}, \quad i = 1,\cdots,n-j+1。 \tag{26}$$

当 n 为偶正整数，且 $0<j\leqslant\frac{n}{2}$ 时，有

$$p_j(t) = \sum_{i=1}^{n/2} a_{ji}\exp[-i(n-i+1)t] + \sum_{i=j}^{n/2} \beta_{ji} t \exp[-i(n-i+1)t], \quad t \geqslant 0。 \tag{27}$$

$$p_0(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n/2} a_{0i}\exp[-i(n-i+1)t] + \sum_{i=j}^{n/2} \beta_{0i} t \exp[-i(n-i+1)t], \quad t \geqslant 0。 \tag{28}$$

其中，当 $i<j$ 时 a_{ji} 由式 (26) 给出，当 $i\geqslant j$ 时，a_{ji} 由下式给出，

$$a_{ji} = \frac{(-1)^j(n-2i+1)n!(n-j)!}{j!(i-1)!(n-i)!(n-j-i+1)!(i-j)!} \times \left[\sum_{\lambda=i}^{n-i}\lambda^{-1} + \sum_{\lambda=i+j-1}^{n-i-j+1}\lambda^{-1} - \frac{2}{n-2i+1}\right], \tag{29}$$

在式 (29) 中，当 $j=1$ 时第一和式不存在，当 $j=\frac{n}{2}$ 时第二和式不存在。式 (27) 与式(28) 中的 β_{ji} 由下式给出：

$$\beta_{ji} = \frac{(-1)^{j+1}(n-2i+1)^2 n!(n-j)!}{j!(i-1)!(n-i)!(n-i-j+1)!(i-j)!}。 \tag{30}$$

当 n 为奇正整数时也可推得相应的表达式。

此外，利用母函数、拉普拉斯变换，经过繁冗的分析与代数运算，可以求得在已知传染病流行开始时群体中恰有 n 个可感染个体的条件下，确定 t 时刻群体中可感染个体数的期望数 $\mu_t = E(X_t)$ 之公式如下：当 n 为偶正整数时，

$$\mu_t = \sum_{j=1}^{n/2} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \times \left[t(n-2j+1)^2 + 2 - (n-2j+1)\sum_{\lambda=j}^{n-j}\lambda^{-1}\right]$$
$$\times \exp[-j(n-j+1)t]。\quad t>0。\tag{31}$$

当 n 为奇正整数时，

$$\mu_t = \sum_{j=1}^{(n+1)/2} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \times \left[t(n-2j+1)^2 + 2 - (n-2j+1)\sum_{\lambda=j}^{n-j}\lambda^{-1}\right]$$
$$\times \exp[-j(n-j+1)t] + \frac{n!}{\left\{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]!\right\}^2},\quad t>0。\tag{32}$$

公式(25)－(32)的详细推导与论述参见文献［43］。对于上述简单的传染病流行模型文献［17］还讨论了群体中直到第 m 个受感染个体出现所需的时间 $T_m(1\leqslant m\leqslant n+1)$ 这样一个有实际意义的随机变量。显然 $T_1=0$，而 T_{n+1}就是群体中直到最后一个个体被感染所需的时间，即所谓一次流行期，文献［17］给出了 $T_m(1\leqslant m\leqslant n+1)$ 的密度函数、分布函数，以及 T_m 的期望与方差，本书不再列出。

例 8　（遗传基因模型） 遗传性质的携带者称为基因，基因是成对出现的。一般地，一对中的每个基因可以取两种不同形式（等位基因）A 和 a。在一个总体中基因 A 和 a 的比例是基因频率，相应地记为 p 和 $q=1-p$。两种等位基因可形成三个基因型：AA、Aa，aa（Aa 和 aA 无区别）。一个后裔分别都以$\frac{1}{2}$的概率接受父亲的两个基因中的任何一个，接受母亲的两个基因中的任何一个，形成一对，这样交配 $Aa\times Aa$ 产生基因型 AA、Aa、aa 的概率分别依次为 1/4、1/2、1/4，交配 $AA\times Aa$ 产生基因型 AA 和 Aa 的概率同为 1/2，交配 $AA\times AA$ 必产生基因型 AA。

在人类群体中的配偶一般是随机形成的，还可看作是互相独立的，在这种随机交配下的后代的基因型自然是随机选择的，一对基因可以从 $\{A,a\}\times\{A,a\}$ 中有 2^2 种方式选择成对，而一个基因型可以从 $\{AA,Aa,aa\}\times\{AA,Aa,aa\}$ 中有 3^2 种方式选择基因型。如果被考查的某群体中男性和女性具有相同的基因型频率分布：$AA:Aa:aa=d:2h:r$，$d+2h+r=1$，A和 a 的基因频率为 $p=d+h$ 和 $q=h+r$。那么在随机交配下，一个后裔具有 A 基因的概率为 p，而具有基因型 AA，Aa，aa 的概率分别依次为 p^2，$2pq$，q^2。

基因是位于遗传的要素染色体上的，染色体上一个基因的位置叫做一个位点。现在应用马氏链来描述一个给定位点上的遗传过程。分别依次用 1、2、3 表示 AA，Aa，aa 三种基因型，并用 p_{ij}表示在给定一个上代（父或母）的基因型为 i 的条件下后裔出现的基因型为 j 的条件概率，现以一对母子为例作一解释。设

$$p_{ij}=P(\text{孩子具有基因型 } j\mid \text{母亲具有基因型 } i),\quad i,j=1,2,3,\tag{33}$$

那么 p_{21}就是基因型 Aa 的母亲生产一个基因型 AA 的孩子的条件概率。即 P（孩子具有基因型 AA|母亲具有基因型 Aa）。为了使孩子具有基因型 AA，他必须从其母亲处以 1/2 的概率继承一个 A 基因，并同时（通过其父亲）从男性群体中以概率 p 得到另一个 A 基因。因此 $p_{21}=p/2$。类似地可算得其它的 p_{ij}，i，$j=1$，2，3。从而有转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p/2 & 1/2 & q/2 \\ 0 & p & q \end{bmatrix}。\tag{34}$$

值得注意的是：式（33）中的 p_{ij}是作为给定上代特定成员有基因型 i 时下一代个体有基因型 j 的条件概率，可以验证此 p_{ij}也恰好等于给定下一代特定成员有基因型 i 时上代具有基因型 j 的条件概率。譬如验算概率

$$P(\text{母亲具有基因型 } AA \mid \text{其孩子具有基因型 } Aa)。\tag{35}$$

孩子从其母亲处各以 1/2 概率继承基因 A 或 a，若孩子从母亲处继承的是 A 基因，那么母亲必含有一个 A 基因，而其母要具有的另一个 A 基因的概率为 p。若孩子从母亲处继承的是 a 基因，显然母亲具有基因型 AA 的概率为零，因此式(35)的概率为$\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}0=\frac{p}{2}$，恰好与前面的 p_{21}相等。其它的 p_{ij}同样能够验证。所以在遗传学研究中，当人们要从子代的信息去推断上一代的基因型时，式(34)中的 P 是很有用的。

由式(34)可算得二步转移概率矩阵

$$P^2 = [p_{ij}^{(2)}] = \begin{bmatrix} p^2+\frac{1}{2}pq & pq+\frac{1}{2}q & \frac{1}{2}q^2 \\ \frac{1}{2}p^2+\frac{1}{4}p & pq+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}q+\frac{1}{2}q^2 \\ \frac{1}{2}p^2 & \frac{1}{2}p+pq & \frac{1}{2}pq+q^2 \end{bmatrix}。\tag{36}$$

譬如其中的 $p_{23}^{(2)}$为

$$\begin{aligned} &P(\text{孙子具有基因型 } aa \mid \text{祖父具有基因型 } Aa) \\ &= p_{23}^{(2)} = P(\text{祖父具有基因型 } aa \mid \text{孙子具有基因型 } Aa)。\end{aligned}\tag{37}$$

由 C－K 方程 $p_{ij}^{(2)}=\sum_{K=1}^{3}p_{ik}p_{kj}$，如果将其中的 p_{ik}用式（35）的方式解释，而 p_{kj}按式（33）的方式来解释，那么此 $p_{ij}^{(2)}$就可理解为在已知某人的同母异父兄弟的基因型为 i 的条件下此人具有基因型为 j 的条件概率。

式（37）所表达的结论还可推广到任何正整数 n 的情形，即对任何 $n=1,2,\cdots$，任何 i，j 有

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(\text{一个人具有基因型 } j \mid \text{其 } n \text{ 代祖先具有基因型 } i) \\ &= P(\text{一个人具有基因型 } j \mid \text{其 } n \text{ 代后裔具有基因型 } i)。\end{aligned}\tag{38}$$

利用Ⅳ．定理 11 中的公式（44）可算得

$$P^n = \begin{bmatrix} p^2+pq/2^{n-1} & 2pq+q(q-p)/2^{n-1} & q^2-q^2/2^{n-1} \\ p^2+p(q-p)/2^n & 2pq+(p-q)^2/2^n & q^2+q(p-q)/2^n \\ p^2-p^2/2^{n-1} & 2pq+p(p-q)/2^{n-1} & q^2+pq/2^{n-1} \end{bmatrix}。\tag{39}$$

由式（39）可见：开始基因型的影响以 1/2 的衰减因子逐代减弱，当 $n\to\infty$时，初始的影响完全消失，即极限转移概率矩阵为

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{bmatrix}。\tag{40}$$

并且它不依赖于初始的基因型 i。记 $[\pi_1,\pi_2,\pi_3]=[p^2,2pq,q^2]$，则易验证：对任何正整数 n 都有

$$\pi_j = \pi_1 p_{1j}^{(n)} + \pi_2 p_{2j}^{(n)} + \pi_3 p_{3j}^{(n)},\quad j=1,2,3。\tag{41}$$

故 $[\pi_1,\pi_2,\pi_3]$ 是一平稳分布，这表明：虽然随机交配一代接着一代地进行，但是平稳的

基因型分布 $[p^2, 2pq, q^2]$ 却永远保持。

对任意的正整数 n，若记

$$f_{ij}^{(n)} = P(n\text{ 代以来的有序人队中首次具有基因型 } j \mid \text{其 } n \text{ 代祖先具有基因型 } i),$$
$$i,j = 1,2,3。 \quad (42)$$

那么 $f_{ii}^{(n)}(i=1,2,3)$ 就是基因型 i 在第 n 代首次返回的概率。利用 Ⅱ. 式 (23) 所得到的式：

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-1} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}, \ i,j = 1,2,3, \quad n = 1,2,\cdots, \quad (43)$$

以及式 (39) 可以递推地算出 $f_{ij}^{(n)}$，i，$j=1, 2, 3$，$n=1, 2, \cdots$。譬如基因型 AA 在第 1 代、第 2 代、第 3 代首次返回的概率依次为

$$f_{11}^{(1)} = p_{11}^{(1)} = p,$$

$$f_{11}^{(2)} = p_{11}^{(2)} - f_{11}^{(1)} p_{11}^{(1)} = p^2 + \frac{pq}{2} - pp = \frac{pq}{2},$$

$$f_{11}^{(3)} = p_{11}^{(3)} - f_{11}^{(1)} p_{11}^{(2)} - f_{11}^{(2)} p_{11}^{(1)} = p^2 + \frac{pq}{4} - p\left(p^2 + \frac{pq}{2}\right) - \frac{pq}{2} \cdot p = \frac{pq}{4}。$$

于是在具有基因型 i 的祖先的条件下其后代终于要返回到基因型 i 的概率为 $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$，$i=1, 2, 3$。当 p，q 皆大于零时，那么由式 (39) 知 $\{1, 2, 3\}$ 是正常返、非周期、互通、不可分的状态集。故 $f_{ii}=1$，$i=1, 2, 3$。又由 Ⅳ. 定理 8 知

$$\mu_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\pi_j}, \qquad j = 1,2,3, \quad (44)$$

即基因型 AA，Aa，aa 的平均返回时间分别依次为

$$\mu_{11} = 1/p^2, \quad \mu_{22} = 1/2pq, \quad \mu_{33} = 1/q^2, \quad (45)$$

由式 (45) 可见，一个群体中 A 基因越多，即 p 越大，那么基因型 AA 返回所需的期望时间即平均换代次数越少。特别地当 $p=q=1/2$ 时，基因型 Aa 的平均返回时间 $\mu_{22} = 2$(代)。

正如文献 [17]、[44]、[45]、[46] 所显示的，近年来，马氏链理论在探讨人口的增长、人的生长发育、血型分布的规律、大群体中单个基因的进化动态等等许多具体问题中，得到了普遍的重视和应用，并取得了与实际相符的很有价值的结果。

§3 马尔科夫链在随机服务系统中的应用

在人类的生产实践中，以及人类社会的生活中，诸如商店、银行、邮局里的服务员为来到的顾客提供服务，加油站为汽车服务，公共汽车又为乘客服务，订购车票处为旅客服务，检修工人为有故障的待修机器服务，停靠码头为进港船只服务，机场跑道为要降落的飞机服务，水库要为上游的来水提供服务等等这样的事例时时处处可见，不胜枚举。撇开上述事例中各自的属性，可以将商店、银行、邮局里的服务员，加油站，公共汽车，订购车票处，检修工人，停靠码头，机场跑道，水库等抽象地统称为“服务机构”，而将随机来到的顾客，汽车，乘客，旅客，待修的机器，进港船只，降落的飞机，下来的水流泛称为“顾客”。那么上述的事例都可统一地被阐述成由服务机构按照一定的服务规则对随机到来的顾客进行服务的一个随机服务系统。为了考查随机服务系统的性能，自然要提出一些人们最关心的数量指标，例如从顾客到达服务机构之时起到他开始接受服务时为止的这段等

待时间，又如作为组建服务机构的服务台连续不间歇工作的时间，即忙期。以及服务系统中顾客的数目，即队长等指标。进而当然需要探讨等待时间、忙期、队长的概率分布和它们的平均值。我们即将看到马氏链理论在描述顾客随机到来的方式上，定量分析服务系统回答上面提出的问题上，衡量系统的服务质量上，为设计既经济又满足需求的服务机构提供充分的论据上，都起到了极其重要的作用。

例 9　设乘客按普阿松过程来到公共汽车站。规定每隔时间 T 开出一辆公共汽车，将站上候车的乘客全部载走。为了缩短乘客的候车时间，准备在原来的两班车之间再增开一辆，即在区间 $(0,T)$ 中选择 t，在 t 时刻增开班车将 $(0,t]$ 中来到的乘客全部载走，而在时刻 T 开出的班车只将 $(t,T]$ 中来到的乘客全部载走，试问应如何选取 t 使得 $(0,T]$ 中来到的全体乘客的总的平均候车时间最短。

记 X_t 为 $(0,t]$ 中来到的乘客数，设 $X_t=n$，由Ⅷ. 定理 21 可以认为这 n 位乘客是相互独立地来到，并且来到的时刻服从 $(0,t)$ 上的均匀分布，因此每位乘客的平均等候时间为 $\frac{t}{2}$，那么这 n 位乘客的总的平均等候时间为 $\frac{nt}{2}$，从而在 $(0,t]$ 中来到的全体乘客的总的平均等候时间为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt}{2}P(X_t=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt}{2}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\frac{\lambda t^2}{2}。\tag{46}$$

根据普阿松过程的平稳增量性，便知在 $(t,T]$ 中来到的全体乘客的总的平均候车时间为 $\frac{\lambda(T-t)^2}{2}$。现在求 t 使得 $\frac{\lambda t^2}{2}+\frac{\lambda(T-t)^2}{2}$ 达到最小，易得 $t=T/2$。

例 10　设某服务机构在每一单元时间间隔内只为一位顾客服务，服务结束顾客即离去，若在一单元时间间隔的开始时刻没有顾客等候服务，那么在此单元时间间隔内机构将停止服务。若等候服务的顾客多于一位，那么顾客按到来的先后依次排列等候。以 $X_{n-1}(n=1,2,\cdots)$ 记第 n 个单元时间间隔的开始时刻正在排队等候的顾客数，并设 $X_0=1$。又以 $\xi_n(n=1,2,\cdots)$ 记在第 n 个单元时间间隔内来到的顾客数，设 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列，其公共分布为

$$P(\xi_n=k)=g_k,\quad k=0,1,2,\cdots,\quad n=1,2,\cdots。\tag{47}$$

于是若 $X_{n-1}=0$，则 $X_n=\xi_n$，若 $X_{n-1}=i\geqslant 1$，则 $X_n=i-1+\xi_n$，综合两者可写成下列关系式：

$$X_n=\max(X_{n-1}-1,0)+\xi_n,\qquad n=1,2,\cdots。\tag{48}$$

因为 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 相互独立，所以 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间为 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的马氏链，而且由式(47)与式(48)知：对任何 $i,j\in\{0,1,2,\cdots\},n=1,2,\cdots$ 有

$$\begin{aligned}P(X_n=j|X_{n-1}=i)&=P(\max(i-1,0)+\xi_n=j|X_{n-1}=i)\\&=P(\xi_n=j-\max(i-1,0))。\end{aligned}\tag{49}$$

即马氏链是齐次的，一步转移概率矩阵由式(49)得

$$P=\begin{bmatrix}g_0&g_1&g_2&g_3&\cdots\\g_0&g_1&g_2&g_3&\cdots\\0&g_0&g_1&g_2&\cdots\\0&0&g_0&g_1&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}。\tag{50}$$

正像在介绍分支过程中所解释的一样，$g_0=1$，或 $g_0=0$，且 $g_1=1$，或 $g_0=0$ 且 $g_1<1$ 等都是

平凡情形不再讨论。以后总假设 $0<g_0<1$，如果还有 $g_0+g_1=1$，那么 $\{0,1\}$ 便构成一个正常返类，并且平稳分布为 $\pi_0=g_0$，$\pi_1=g_1$，$\pi_k=0$，$k=2,3,\cdots$。从任意的状态 $k=2,3,\cdots$ 出发，迟早要经过 $k-1,k-2,\cdots,2$，最后到达 1，进入这正常返类。而在条件

$$0<g_0<1,\quad g_0+g_1<1, \tag{51}$$

之下，必有某 k_0 ($\geqslant 2$) 使 $g_{k_0}>0$，由式 (50) 知 $p_{00}=p_{10}=\cdots=p_{i,i-1}=\cdots=g_0>0$，$p_{0k_0}=p_{1k_0}=p_{k,k-1+k_0}=g_{k_0}>0$，$k=2,3,\cdots$，因此该马氏链是不可分的，状态 0 是非周期的，从而所有状态都是非周期的。

记 $\mu=\sum_{k=1}^{\infty}kg_k$ 为一个单元时间间隔内来到的顾客的平均数，记 $G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k z^k$ 为式(47)中分布的母函数，由 Ⅱ．定理 35 知：若该马氏链是非常返的，则有 $P(\lim_{n\to\infty}X_n=\infty)=1$。再由定理 2，方程 $z=G(z)$ 在 $(0,1)$ 中有一个根，便可严格地证明以下有用的结论（参见文献[4]）：

(i) 若 $\mu>1$，则该马氏链是非常返的；若 $\mu=1$，该链是零常返的；若 $\mu<1$，该链是正常返的。

(ii) 若该链是正常返的，必有唯一的平稳分布 $[\pi_k,k=0,1,2,\cdots]$，记此分布的母函数为 $\pi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k z^k$，则

$$0<\pi_0=1-\mu<1, \tag{52}$$

$$\pi(z)=\pi_0\frac{(1-z)G(z)}{G(z)-z}=\frac{(1-\mu)(1-z)G(z)}{G(z)-z}。 \tag{53}$$

例 11 对比例 10 中的模型。假设在每个单元时间间隔内只来到一位顾客，而为顾客服务的服务员个数是随机的，并且它们还是独立同分布的。实际上这是把前后相继来到的两位顾客之间所经历的时间段看作为一个单元时间间隔，当然它是随机的。而在这单元时间间隔内能为多少位顾客服务，这也就是此单元间隔内参加服务的服务员个数，自然它也是随机的。

以 X_n 记第 n 个单元时间间隔的结束时刻依先后到来的次序在排队等候的顾客数，并设 $X_0=1$，总在每个单元时间间隔的开始时刻来到一位顾客，又以 ξ_n 记在第 n 个单元时间间隔内参加服务的服务员数，设 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列，其公共分布仍记为

$$P(\xi_n=k)=g_k,\quad k=0,1,\cdots,\quad n=1,2,\cdots。 \tag{54}$$

当服务员个数大于顾客数时，多余的服务员不参加服务。由此可得下列关系式：

$$X_0=1,\quad X_n=\max(X_{n-1}+1-\xi_n,0),\quad n=1,2,\cdots。 \tag{55}$$

仍因 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 的独立性可知 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是状态空间为 $\{0,1,\cdots\}$ 的马氏链。对任何 $i,j\in\{0,1,\cdots\}$，$n=1,2,\cdots$，由式(54)与式(55)，及 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 的独立性有

$$\begin{aligned}P(X_n=j|X_{n-1}=i)&=P(\max(i+1-\xi_n,0)=j|X_{n-1}=i)\\&=P(\max(i+1-\xi_n,0)=j)\\&=\begin{cases}P(\xi_n\geqslant i+1)=\sum_{k=i+1}^{\infty}g_k, & j=0,\\ P(i+1-\xi_n=j)=g_{i-j+1}, & 1\leqslant j\leqslant i+1,\\ 0, & j>i+1。\end{cases}\end{aligned} \tag{56}$$

由式（56）可知：马氏链 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 是齐次的，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} a_0 & g_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & g_1 & g_0 & 0 & \cdots \\ a_2 & g_2 & g_1 & g_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}。 \tag{57}$$

其中 $a_i=\sum\limits_{k=i+1}^{\infty} g_k$，$i=0,1,\cdots$。对于 $g_0=1$，$g_1=1$，$g_0=0$ 且 $g_1<1$，$0<g_0<1$ 且 $g_0+g_1=1$ 等等容易理解的平凡情况不再论述。仍然仅在假设

$$0<g_0<1,\quad g_0+g_1<1 \tag{58}$$

的条件下进行讨论。类似于例 10 中的讨论，在式（58）之下，所有状态是互通的，状态 0 是非周期的，从而马氏链 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 是不可分的非周期的。

仍然记 μ 与 $G(z)$ 分别依次为分布（54）的期望与母函数，又依定理 2 令 r 是方程 $z=G(z)$ 在 $(0,1)$ 中必存在的根。则可证明以下有用的结论（参见文献［4］）：

(i) 若 $\mu<1$，该马氏链是非常返的；(ii) 若 $\mu=1$，该链是零常返的；(iii) 若 $\mu>1$，该链是正常返的，这时存在唯一的平稳分布是

$$\pi_j=(1-r)r^j,\quad j=0,1,\cdots。 \tag{59}$$

例 12　设有 M 台机床与 m 位修理工人，$m\leqslant M$。一旦机床出现故障，立即由空闲修理工人修理，若无空闲工人，只有等到有空闲的修理工人之后再来修理，修复的机床立即重新工作。假设在时刻 t 正常工作的每台机床在 $(t,t+\Delta t)$ 中损坏的概率都为 $\lambda(\Delta t+o(\Delta t))$，而在时刻 t 正进行修理的每台机床在 $(t,t+\Delta t)$ 内被修复的概率都为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$。其中 $\lambda,\mu>0$。又设各台机床的运转状况是相互独立的。

若记 X_t 为时刻 t 因故障未工作的机床数。根据以上的假定，$\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是状态空间为 $\{0,1,\cdots,M\}$ 的齐次马氏链，其密度矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix} -M\lambda & M\lambda & 0 & 0 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots 0 \\ \mu & -[(M-1)\lambda+\mu] & (M-1)\lambda & 0 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0\cdots\cdots m\mu & -[(M-m)\lambda+m\mu] & (M-m)\lambda & & 0\cdots\cdots 0 & & \\ 0\cdots\cdots 0 & m\mu & -[(M-m-1)\lambda+m\mu] & & (M-m-1)\lambda\cdots\cdots 0 & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0\cdots\cdots & & & \cdots\cdots m\mu & -(\lambda+m\mu) & \lambda & \\ 0\cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \cdots & m\mu & -m\mu \end{bmatrix}. \tag{60}$$

由此可知 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是有限不可分正常返的生灭过程。由Ⅷ. 式（82）可得该生灭过程的平稳分布应满足的方程组：

$$\begin{cases} -M\lambda\pi_0+\mu\pi_1=0, \\ (M-j+1)\lambda\pi_{j-1}-[(M-j)\lambda+j\mu]\pi_j+(j+1)\mu\pi_{j+1}=0, & j=1,\cdots,m-1, \\ (M-j+1)\lambda\pi_{j-1}-[(M-j)\lambda+m\mu]\pi_j+m\mu\pi_{j+1}=0, & j=m,\cdots,M-1。 \\ \lambda\pi_{M-1}-m\mu\pi_M=0。 \end{cases} \tag{61}$$

解此方程组（61）得平稳分布如下：

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{m} C_M{}^K \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \sum_{k=m+1}^{M} C_M^k \frac{(m+1)\cdots k}{m^{k-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right]^{-1}, \tag{62}$$

$$\pi_j = \begin{cases} C_M^j \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^j \pi_0, & j = 1, \cdots, m, \\ C_M^j \dfrac{(m+1)\cdots j}{m^{j-m}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^j \pi_0, & j = m+1, \cdots, M。 \end{cases} \tag{63}$$

在管理使用这 M 台机床过程中，如何合理地配备使用检修工人，当然是一个重要问题。为此先定义两个有实际意义的数量指标。显然 $\sum_{k=1}^{M} k\pi_k$ 表示因故障不工作机床的平均台数，因此定义

$$该\ M\ 台机床的平均利用率\ r_1 = 1 - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} k\pi_k, \tag{64}$$

这是合理的。当不工作的机床数 $k \leqslant m$ 时，修理工人的利用率明显为 $\frac{k}{m}$，若此 $k > m$ 时，全体修理工人都在工作，利用率当然为 1。因此定义

$$该\ m\ 个修理工人的平均利用率\ r_2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \pi_k + \sum_{k=m+1}^{M} \pi_k, \tag{65}$$

这是合理的。根据实践经验，容易理解机床平均利用率 r_1 与修理工人平均利用率 r_2 之间是一者提高那么另一者就下降的关系。而且比值 λ/μ 主要取决于机床的质量及修理工人的技术水平。通常在给定比值 λ/μ 之后还应该根据各项指标与费用合理地确定出应配备的修理工人的数量。对此，下面提供一张有实际参考价值的典型的数字表。

表 7　修理工的数量与平均利用率　　$\lambda/\mu = 0.45$

机床台数 M	修理工数 m	修理工平均利用率
4	1	0.881
8	2	0.934
16	4	0.994

由此表给出的数据可知：在保持修理工人数与机床台数的比例不变的情况下，随着机床台数的增加，修理工的平均利用率却有显著提高。16 台机床由 4 位修理工人集中统一管理比 4 位修理工每人分管 4 台机床的效率高。当然在修理工人的平均利用率近于 1 时，再过份地强调集中使用修理工人的意义就不大了。像表 7 所给出的数据还能帮助我们对如何分组配备修理工人作出决策。

例 13　设车间里有 M 部机器，每部机器正常工作的时间都服从参数为 λ 的指数分布，且各部机器的工作状况相互独立。如果有 k 部（$1 \leqslant k \leqslant M$）机器出现故障，要进行修理必须全车间停工，而且无论 k 值的大小，修理的时间总是服从参数为 μ 的指数分布。试确定这样的 k 值 k_0，当出现故障的机器是 k_0 部时，车间全部停工检修，才可使全车间的生产率为最大，即正常工作的机器的平均台数为最大。

记 X_t 为时刻 t 损坏的机器部数。类似于例 12，由假设 $\{X_t, t \geqslant 0\}$ 是马氏链。注意到依假定当损坏的机器数 k 小于 k_0 时，车间不停工修理，让其余 $M-k$ 台完好的机器继续工作。一旦损坏的机器数达到 k_0 时，车间即停工，将 k_0 台有故障的机器全部修复后才重新开始工作。因此该马氏链具有 k_0+1 个状态 $\{0, 1, \cdots, k_0\}$，而且由状态 k_0 必转入状态 0。若 $X_0 = 0$，

由独立性与机器正常工作时间服从指数分布，修理时间也服从指数分布的假定知：$p_{00}(t) = P(X_t = 0) = e^{-M\lambda t}, t \geqslant 0$；而且在 $t \to 0+$ 时，$p_{01}(t) = Me^{-(M-1)\lambda t}(1 - e^{-\lambda t} + o(t))$；$p_{k_0 0}(t) = 1 - e^{-\mu t}, p_{k_0 k_0}(t) = e^{-\mu t}, t \geqslant 0$。故

$$q_{00} = \lim_{t \to 0+} \frac{e^{-M\lambda t} - 1}{t} = -M\lambda,$$

$$q_{01} = \lim_{t \to 0+} \frac{Me^{-(M-1)\lambda t}(1 - e^{-\lambda t} + o(t))}{t} = M\lambda,$$

$$q_{k_0 k_0} = \lim_{t \to 0+} \frac{e^{-\mu t} - 1}{t} = -\mu,$$

$$q_{k_0 0} = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - e^{-\mu t}}{t} = \mu 。$$

其它的 q_{ij} 可类似求出，这样得密度矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} -M\lambda & M\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(M-1)\lambda & (M-1)\lambda & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -(M-k_0+1)\lambda & (M-k_0+1)\lambda \\ \mu & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}。\tag{66}$$

由式（66）便知该马氏链的平稳分布应满足的方程组是：

$$\begin{cases} -M\lambda\pi_0 + \mu\pi_{k_0} = 0, \\ (M-j+1)\lambda\pi_{j-1} - (M-j)\lambda\pi_j = 0, \quad j = 1, \cdots, k_0 - 1, \\ (M-k_0+1)\lambda\pi_{k_0-1} - \mu\pi_{k_0} = 0。 \end{cases}\tag{67}$$

由式(67)解得

$$\pi_{k_0} = M\frac{\lambda}{\mu}\pi_0, \quad \pi_j = \frac{M-j+1}{M-j}\pi_{j-1} = \cdots = \frac{M}{M-j}\pi_0, \qquad j = 1, \cdots, k_0 - 1。$$

从而有

$$\begin{cases} \pi_0 = \left[M\left(\sum_{j=0}^{k_0-1}\frac{1}{M-j} + \frac{\lambda}{\mu}\right)\right]^{-1}, \\ \pi_j = \frac{M}{M-j}\pi_0, \quad j = 1, \cdots, k_0 - 1, \quad \pi_{k_0} = \frac{M\lambda}{\mu}\pi_0。 \end{cases}\tag{68}$$

于是正常工作着的机器的平均台数为

$$\begin{aligned} A_{k_0} &= M\pi_0 + (M-1)\pi_1 + \cdots + (M-k_0+1)\pi_{k_0-1} + 0\,\pi_{k_0} \\ &= k_0\left[\sum_{j=0}^{k_0-1}\frac{1}{M-j} + \frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1}。 \end{aligned}\tag{69}$$

由以上的论证及 k_0 的含义，k_0 应使 A_{k_0} 在 $\{A_k = M\pi_0 + (M-1)\pi_1 + \cdots + (M-k+1)\pi_{k-1} = k\left[\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{M-j} + \frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1}, k = 1, \cdots, M\}$ 中达到最大。下面来确定 k_0。

首先注意到对 $\{A_k, 1 \leqslant k \leqslant M\}$，若 $A_k \geqslant A_{k+1}$，则 $A_k > A_{k+l}$，$2 \leqslant l \leqslant M-k$。事实上由 $A_k \geqslant A_{k+1}$ 得 $\frac{\lambda}{\mu} \leqslant \frac{k}{M-k} - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{M-j}$。由此，对 $2 \leqslant l \leqslant M-k$ 有

$$(k+l)\frac{\lambda}{\mu} + (k+l)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{M-j} \leqslant k\frac{\lambda}{\mu} + k\left[\frac{l}{M-k} + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{M-j}\right]$$

$$< k\frac{\lambda}{\mu} + k\sum_{j=0}^{k+l-1}\frac{1}{M-j},$$

这就是 $A_k > A_{k+l}$。

若 $A_1 \geqslant A_2$，即 $\left[\frac{1}{M}+\frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1} \geqslant 2\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{M-1}+\frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1}$，也就是 $\frac{\lambda}{\mu} \leqslant \frac{1}{M(M-1)}$ 时，由前面所证知：这时 $A_1 = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant M} A_k$，故应取 $k_0=1$。

若 $A_1 < A_2$，$A_2 \geqslant A_3$，即 $\left[\frac{1}{M}+\frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1} < 2\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{M-1}+\frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1}$，而且 $2\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{M-1}+\frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1} \geqslant 3\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{M-1}+\frac{1}{M-2}+\frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1}$，也就是 $\frac{1}{M(M-1)} < \frac{\lambda}{\mu} \leqslant \frac{3M-2}{M(M-1)(M-2)}$ 时，仍由前面所证知：这时 $A_2 = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant M} A_k$，故应取 $k_0=2$。

一般地，若 $A_1 < A_2 < \cdots < A_{i+1}$ 且 $A_{i+1} \geqslant A_{i+2}$，$1\leqslant i\leqslant M-2$，即若 $\frac{i}{m-i} - \sum\limits_{j=0}^{i-1}\frac{1}{M-j} < \frac{\lambda}{\mu} \leqslant \frac{i+1}{M-i-1} - \sum\limits_{j=0}^{i}\frac{1}{M-j}$，$1\leqslant i\leqslant M-2$，则此时 $A_{i+1} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant M} A_k$，故应取 $k_0 = i+1$。

当然，若 $A_1 < A_2 < \cdots < A_M$，即 $\frac{\lambda}{\mu} > M-1-\sum\limits_{j=0}^{M-2}\frac{1}{M-j}$ 时，则 $A_M = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant M} A_k$，故应取 $k_0=M$。

例 14 回顾第一章中的例 5 水库贮水模型。若把“降雨”当作“顾客”，将降雨的时间当作顾客陆续到来的时间。将每次降雨量看作对顾客的服务时间，那么库中水容量与等待时间两者实际上是等同的。很多类型的水库问题还可直接化为随机服务系统的问题，两者的关系是很密切的。沿用 I．例 5 中的记号，首先来寻求每年水库贮水量序列 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 此马氏链的平稳分布。

为方便起见设 I．例 5 中的 $M=1$。记 $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, i,j=0,1,\cdots,k-1$。那么就有 $\pi_j = \sum\limits_{i=0}^{k-1}\pi_i p_{ij}, j=0,1,\cdots,k-1$。由 I．式 (42) 上式可写成

$$\begin{cases}\pi_0 = (p_0+p_1)\pi_0 + p_0\pi_1,\\ \pi_1 = p_2\pi_0 + p_1\pi_1 + p_0\pi_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \pi_{K-2} = p_{K-1}\pi_0 + p_{K-2}\pi_1 + \cdots + p_0\pi_{K-1},\\ \pi_{K-1} = H_K\pi_0 + H_{K-1}\pi_1 + \cdots + H_1\pi_{K-1}.\end{cases} \tag{70}$$

式 (70) 即平稳分布 $[\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{K-1}]$ 应满足的方程。为解出 $[\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{K-1}]$，将式 (70) 中的 $[\pi_0,\cdots,\pi_{k-1}]$ 分别依次换成 $[u_0,\cdots,u_{K-1}]$ 即

$$\begin{cases}u_0 = (p_0+p_1)u_0 + p_0u_1,\\ u_1 = p_2u_0 + p_1u_1 + p_0u_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_{K-2} = p_{K-1}u_0 + p_{K-2}u_1 + \cdots + p_0u_{K-1},\\ u_{K-1} = H_Ku_0 + H_{K-1}u_1 + \cdots + H_1u_{K-1}.\end{cases} \tag{71}$$

在式 (71) 中，令 $u_0=1$，并由其中的第一式可解得 $u_1 = \frac{1-p_0-p_1}{p_0}$，再将此 u_1 与 $u_0=1$

代入其中的第二式可解得 $u_2=(1-p_1)\dfrac{(1-p_0-p_1)}{p_0^2}-\dfrac{p_2}{p_0}$。如此递推地计算下去，直到算得 u_{K-1} 为止。最后 $\pi_0=1\Big/\sum\limits_{i=0}^{K-1}u_i,\pi_j=u_j\Big/\sum\limits_{i=0}^{K-1}u_i,j=1,\cdots,k-1$。显然 π_0 就是水库枯竭的概率。而水库积水过剩而溢出的概率为 $P(X_n+Y_n>K)$，因为 X_n 与 Y_n 相互独立。可利用卷积公式算出 X_n+Y_n 的分布，从而求得溢出概率。

对额定容量为 K 个单位的水库，仍以 $X_n(n=0,1,\cdots)$ 记水库在 n 时刻的容水量，以 $Y_n(n=0,1,\cdots)$ 记在时间段 $[n,n+1)$ 内流入水库的水量，$\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 不仅与 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 独立，而且本身还是独立同分布的，公共分布为

$$P(Y_n=j)=p_j,\quad j=0,1,\cdots,n=0,1,\cdots。$$

只要水库不空，每次都泄放一个单位水量。在初始水库的容水量 $X_0=i(0<i\leqslant K)$ 的条件下，考虑水库在溢流之前于时刻 n 首次放空的概率 $f_{i0}^{(n)}$

$$f_{i0}^{(n)}=\begin{cases}P(X_1=0|X_0=i), & n=1,\\ P(X_n=0;X_m>0,X_m+Y_m\leqslant K,1\leqslant m<n|X_0=i), & n>1。\end{cases}\tag{72}$$

自然这是人们很关心的问题。

定理 3　在上面对有限水库所作的假设下，则有

$$\begin{cases}f_{i0}^{(n)}=0, & 当\ n<i。 & (73)\\ f_{i0}^{(1)}=p_0\,\delta_{i1}, & & (74)\\ f_{i0}^{(n)}=\sum\limits_{j=0}^{k-i}p_j\,f_{j+i-1,0}^{(n-1)}, & 当\ n>1。 & (75)\end{cases}$$

其中规定 $\delta_{i1}=\begin{cases}1, & i=1,\\0, & i\neq 1,\end{cases}f_{00}^{(0)}=1,f_{l0}^{(0)}=0,\ l=1,2,\cdots$。

证　根据假设条件，式 (73)、(74) 显然成立。对 $n\geqslant i$ 的情形，记 $V=\min(K-i,n-i)$。由式 (72)，利用 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的马氏性，它与 Y_0 独立，并注意到规定每次泄放都为一个单位水量，而且在积水量超过库容量 K 时将会溢出。那么当 $i>1$ 时便有

$$\begin{aligned}f_{i0}^{(n)}&=P(X_n=0;X_m>0,X_m+Y_m\leqslant K,1\leqslant m<n|X_0=i)\\&=\sum_{j=0}^{V}P(Y_0=j)P(X_n=0;X_m>0,X_m+Y_m\leqslant K,1\leqslant m<n|X_0=i,Y_0=j)\\&=\sum_{j=0}^{V}p_jP(X_n=0;X_m>0,X_m+Y_m\leqslant K,2\leqslant m<n;X_1=i-1+j\leqslant K|X_0=i,Y_0=j)\\&=\sum_{j=0}^{V}p_jP(X_n=0;X_m>0,X_m+Y_m\leqslant K,2\leqslant m<n|X_1=i-1+j,X_0=i,Y_0=j)\\&\quad\cdot P(X_1=i-1+j|X_0=i,Y_0=j)\\&=\sum_{j=0}^{V}p_jP(X_n=0;X_m>0,X_m+Y_m\leqslant K,2\leqslant m<n|X_1=i-1+j)\\&=\sum_{j=0}^{V}p_j\,f_{j+i-1,0}^{(n-1)}=\sum_{j=0}^{K-i}p_j\,f_{j+i-1,0}^{(n-1)}。\end{aligned}$$

上式中最后两个等号成立的根据依次是 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的齐次性，它与 $\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$ 的独立性，以及式 (73)。

当 $n>1$ 且 $i=1$ 时，上述推理的求和号中相应于 $j=0$ 的那一项即 $p_0f_{i-1,0}^{(n-1)}$ 应当去掉，因为否则就有 $X_1=i-1+j=0$，这与在时刻 $n>1$ 首次放空的假设矛盾，故有

$$f_{i0}^{(n)} = \sum_{j=1}^{K-i} p_j f_{j0}^{(n-1)} = \sum_{j=0}^{K-i} p_j f_{j0}^{(n-1)}。$$

最后一个等号成立的根据是按规定 $f_{00}^{(n-1)} = 0$ 。定理证完。

下面再给出一个颇有实用价值的结论。

定理 4　对额定容量为 K 个单位的水库，在初始库容 $X_0=i>0$ 的条件下，水库溢流前首次放空时间分布 $\{f_{i0}^{(n)}, n = 0,1,\cdots\}$ 的母函数 $F_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{i0}^{(n)} z^n$ 为

$$F_i(z) = zp_0 \delta_{i1} + z^2 Q(i)[I - ZQ]^{-1} f^{(1)} \tag{76}$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{K-2} & p_{K-1} & 0 \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{K-3} & p_{K-2} & 0 \\ 0 & p_0 & \cdots & p_{K-4} & p_{K-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{77}$$

$Q(i)$ 为矩阵 Q 的第 i 行，I 为单位矩阵，$f^{(1)} = [p_0, 0, \cdots, 0]'$ 。从而水库在溢流前放空的概率为

$$F_i(1) = p_0 \delta_{i1} + Q(i)[I - Q]^{-1} f^{(1)}。 \tag{78}$$

定理 4 的详细证明可参看文献 [47]，本书不再给出。

例 15　设有一轮船码头，在 $[0, t)$ 时间区间内来到此码头要求装卸货物的轮船数 X_t，$t \geqslant 0$ 构成一个以 $\lambda(>0)$ 为参数的普阿松过程，即

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0,1,\cdots,\ t \geqslant 0。$$

又假设每条轮船装卸货物的时间都是服从同一个参数为 $\mu(>0)$ 的负指数分布的随机变量 T，即

$$P(T \leqslant t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0。 \end{cases}$$

假定各条船的装卸货物时间是相互独立的，而且它们与到来的轮船数 $\{X_t, t \geqslant 0\}$ 亦相互独立。若令 Y_t 是在时刻 t 停在码头内的船只数，则 $\{Y_t, t \geqslant 0\}$ 是一生灭过程，其密度矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}。 \tag{79}$$

此结论的详细且较长的证明可参看文献 [6]。

在其它领域里的一些实际问题中，类同于上面所介绍的应用实例还可以列举许多。其中特别引人注目的是马氏链理论在计算机系统建模与性能分析评价中的应用，将在下一节里专门作一介绍。

§4　马尔科夫链在计算机科学中的应用

现代计算机系统是由一些硬件又有一些软件针对一定目的按照一定关系组成的一个复杂的整体。要评价它的性能是否优良，是否达到了预期的目标，首先必须明确该系统究竟有哪些主要的性能，并建立描述或度量这种系统性能的确切指标。一般说来，一个计算机系统的性能应包括以下两个主要方面：

(i)　系统的可靠性或可利用性，亦即计算机系统能正常工作的时间，描述它的指标可以是持续正常工作的时间长度，如平均无故障时间，也可以是在一段时间内正常工作时间所占的百分比等等这些综合性指标。

(ii) 系统的处理能力或效率，用来刻画这种性能的综合指标可以是各种吞吐率，如计算机系统在单位时间内能够处理完毕的作业数量；也可以是各种响应时间，即从计算机系统得到输入到给出输出之间的这段时间；还可以是各种利用率，即计算机系统的各种部件的利用率，也就是在给定的时间区间中，被使用的时间与整个时间之比。

所谓计算机系统的性能评价就是要求出其性能指标值。到目前为止已积累了不少寻求系统性能指标的切实可行的方法。其中一种比较省时而且经济的方法是建立计算机系统的解析模型，运用数学工具分析该模型，求出该模型的各种性能指标值，用它们近似地来代表原计算机系统的相应性能指标值。这类解析模型方法不仅可以用于已经建成的计算机系统的性能评价，而且还可用于尚未实现正在构想设计中的系统，为其性能的预测提供理论依据。

若将计算机系统中的中央处理装置 (CPU)、存贮器、磁盘、输入-输出设备等各种部件都看作是服务机构或服务员，将请求、任务、程序等作业看作是顾客，某作业在某部件中进行处理时，就当作该顾客在接受该服务员的服务。一旦作业量超过了能够处理它们的部件数量时，必将产生等待中央处理装置服务的作业队列，或等待内存分配的作业队列，或等待输入-输出设备服务的作业队列等等排队现象。计算机系统中的大多数性能问题正是与排队延迟有关，这种延迟是由于使用资源冲突而引起的，因此在分析各种使用资源冲突对系统性能的影响时（如研究吞吐率、利用率、平均响应时间等指标时），运用排队论知识是很自然的。从已获得的理论结果与实际观测或模拟研究结果的符合程度上也说明了应用排队理论是很合适的。所以在计算机系统性能评价中，常用的模型之一是排队模型，又因为往往具有无后效性，故经常碰到的是马尔科夫型排队模型。

例 16[46]　某公司的一个门市部中，设有一个远程终端，它连接于公司的计算中心的计算机上，终端每天开放 16 h 供在本地工作的工程师们使用。假定工程师们来到的模式是随机的，每天平均有 20 位工程师来使用终端，再假定每个工程师占用终端的时间是服从负指数分布的随机变量，其均值为 30 min，那么 20 人共需 10 h，既然终端开设 16 h，因此终端的利用率为 10/16＝62.5%。现在使用终端的工程师仍抱怨等待时间太长要求增加一个终端。试问这种要求是否合理？

通常用 M 表示顾客来到的规律即输入过程是参数为 λ 的普阿松过程，以 c 表示服务机构中服务员的数量，若服务员对顾客的服务时间是一串相互独立的具有同一参数为 μ 的负指数分布的随机变量列，也以 M 表示，那么例 16 就是以通用的记号 $M/M/1$ 所表示的等待

制先到先服务的排队系统。当然为各顾客的服务时间是相互独立的，而且它们与输入过程也是独立的。为了回答例 16 提出的具体问题先对 $M/M/c$ 的一般情形进行讨论。

令 X_t 表示时刻 t 在该服务机构中正在接受服务和正在排队等待服务的顾客总数，或简称为时刻 t 的队长。如果现在 t_0 时刻已知服务系统中有 k 位顾客，即 $X_{t_0}=k$，那么将来 $t(>t_0)$ 时的队长 X_t，除了 k 值之外，仅取决于以下因素：

(i) 目前正在接受服务的 $\min(k,c)$ 位顾客在 $(t_0, t]$ 内结束服务而离去的个数；

(ii) 在 $(t_0, t]$ 内新来到的顾客数；

(iii) 时刻 t_0 之后才开始接受服务的顾客在 $(t_0, t]$ 内结束服务而离去的个数。

然而因为指数分布的无后效性，上述三种因素都与 t_0 之前的队长无关，因此 $\{X_t,t\geqslant 0\}$ 是马氏链。

由假设，若在时刻 t 有 i 位顾客在接受服务，那么在 $(t,t+\Delta t]$ 内有一位顾客结束服务的概率为 $i\mu\Delta t+o(\Delta t)$，多于一位顾客服务完毕的概率是 $o(\Delta t)$，由于顾客的来到与正在接受服务之顾客的进展情况是相互独立的，因此在 $(t,t+\Delta t]$ 内既有顾客来到又有顾客服务完毕而离去的概率为 $o(\Delta t)$，于是 $\{X_t,t\geqslant 0\}$ 的密度矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{80}$$

其中

$$\begin{cases} \lambda_j=\lambda, & j=0,1,2,\cdots, \\ \mu_j=\begin{cases} j\mu, \\ c\mu, \end{cases} & \begin{matrix} j=1,2,\cdots,c, \\ j=c+1,c+2,\cdots, \end{matrix} \end{cases} \tag{81}$$

因而 $\{X_t,t\geqslant 0\}$ 是一个不可分的生灭过程。它还具有以下一些性质。

定理 5　对于上面所给的密度矩阵如式 (80)、式 (81) 的生灭过程 $\{X_t,t\geqslant 0\}$，它的转移概率矩阵族为 $\{[p_{ij}(t)],t\geqslant 0\}$。若记 $u=\dfrac{\lambda}{\mu}$，$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}$，$\rho_0=1$，及

$$\rho_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}=\begin{cases} u^k/k!, & k=0,1,\cdots,c, \\ u^c\rho^{k-c}/k!=\rho_c\rho^{k-c}, & k=c,c+1,\cdots, \end{cases} \tag{82}$$

则 (i) $\rho>1$ 时，链为非常返的；$\rho=1$ 时，链为零常返的；$\rho<1$ 时，链为正常返的。

(ii) 当 $\rho<1$ 时，有 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\rho_j/\sum\limits_{k=0}^{\infty}\rho_k, i,j=0,1,\cdots$。从而有

$$\begin{aligned} \pi_j &= \lim_{t\to\infty}P(X_t=j)=\lim_{t\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}P(X_0=i)p_{ij}(t)=\rho_j/\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k \\ &= \begin{cases} \dfrac{u_j/j!}{\sum\limits_{k=0}^{c-1}u^k/k!+u^c/c!(1-\rho)}, & j=0,1,\cdots,c, \\ \dfrac{u^c\rho^{j-c}/c!}{\sum\limits_{k=0}^{c-1}u^k/k!+u^c/c!(1-\rho)}=\pi_c\rho^{j-c}, & j=c,c+1,\cdots。 \end{cases} \end{aligned} \tag{83}$$

此 $\{\pi_j,j=0,1,\cdots\}$ 是 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 的即队长的平稳分布。

定理 5 的论证可参看文献［4］或［6］，本书不再给出，这里仅作某些直观解释。λ 是单位时间内来到顾客的平均数。$1/\mu$ 是每个顾客的平均服务时间，若 c 个服务员全部都工作时，服务好一个顾客的平均时间为 $1/c\mu$，那么 $c\mu$ 就是单位时间内服务完毕的顾客平均数，因此 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}$ 表示单位时间内来到与离去顾客数之比即来往服务强度，当 $\rho>1$ 即 $\lambda>c\mu$ 时，出现供不应求的状况，排队等候的顾客越来越多，队长将趋于无穷。从而对任何 i，$j=0$，1，…，总有

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} P(X_t = j \mid X_0 = i) = 0, \tag{84}$$

服务系统不能达到平衡稳定状态。当 $\rho<1$ 即 $\lambda<c\mu$ 时，供过于求，服务能力足以完成来到顾客的需求，等待服务的顾客数不会越来越多，服务系统将趋于稳定，故有极限

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)\left(=\rho_j\Big/\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k\right), i,j = 0,1,\cdots。$$

特别地，在 $c=1$ 即单个服务员的情形下，$\rho=u=\frac{\lambda}{\mu}<1$ 时，由式 (83) 知，这时的平稳分布为几何分布：

$$\pi_j = (1-\rho)\rho^j, \qquad j = 0,1,\cdots, \tag{85}$$

于是当一顾客来到时因服务员空闲而立即得到服务的概率为 $\pi_0=1-\rho$，有不少于 n 位顾客在服务机构中的概率为 $\sum_{j=n}^{\infty}\pi_j = \sum_{j=n}^{\infty}(1-\rho)\rho^j = \rho^n$，所以在来往服务强度 ρ 较小时，遇到长队的可能性较小。

由定理 5 知：对 $M/M/C$ 等待排队系统，当 $\rho<1$ 时，一位顾客来到服务机构，不能立即接受服务而需要等待的概率 p_W 应该是服务系统中队长处于平衡状态 $j\in\{c,c+1,\cdots\}$ 的概率，即由式 (83)

$$p_W = \sum_{j=c}^{\infty}\pi_j = \sum_{j=c}^{\infty}\pi_c\,\rho^{j-c} = \frac{\pi_c}{1-\rho} = \frac{u^c/c!(1-\rho)}{\sum_{k=0}^{c-1}u^k/k! + u^c/c!(1-\rho)}。 \tag{86}$$

在服务机构内的顾客总数 l（包括正在接受服务的与排队等待服务的，即队长）的均值称为**平均队长**，记为 $L = El = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j$。如果只考虑排队等待的顾客数 l_q 即**等待队长**，而不考虑正在接受服务的顾客数，这时其均值称为**平均等待队长**，记为 $L_q = El_q = \sum_{j=c+1}^{\infty}(j-c)\pi_j$。用 w_q 表示顾客排队等待服务的时间，s 表示顾客接受服务的时间，记 $w=w_q+s$，即 w 是顾客在服务机构内总的**逗留时间**，那么 w_q 的等待时间分布，w 的逗留时间分布，以及它们的均值**平均等待时间**、**平均逗留时间**分别依次记为

$$C_q(z) = P(w_q \leqslant z),\ -\infty < z < \infty,\ C(z) = P(w \leqslant z),\ -\infty < z < \infty,$$

$$W_q = Ew_q = Ew - Es, \qquad W = Ew。$$

定理 6　对 $M/M/c$ 等待排队系统，在 $\rho<1$ 以及上面所作的假设与记号下，当系统达到稳定状态后，即对充分大的 t，$P(X_t = j) \approx \pi_j, j = 0,1,\cdots$，则有

(i) $$L_q = \frac{u^c/c!}{\sum_{k=0}^{c-1}u^k/k! + u^c/c!(1-\rho)}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)^2}。 \tag{87}$$

$$L=\frac{u^c/c!}{\sum_{k=0}^{c-1}u^k/k!+u^c/c!(1-\rho)}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)^2}+u。\tag{88}$$

(ii)
$$W_q=\frac{u^c/\lambda c!}{\sum_{k=0}^{c-1}u^k/k!+u^c/c!(1-\rho)}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)^2}。\tag{89}$$

$$W=\frac{u^c/\lambda c!}{\sum_{k=0}^{c-1}u^k/k!+u^c/c!(1-\rho)}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)^2}+\frac{1}{\mu}\tag{90}$$

证
$$\begin{aligned}L_q&=\sum_{j=c+1}^{\infty}(j-c)\pi_j=\sum_{j=0}^{\infty}j\pi_{j+c}=\sum_{j=0}^{\infty}j\pi_c\rho^j\\&=\pi_c\rho\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j\Big)'=\pi_c\rho\Big(\frac{\rho}{1-\rho}\Big)'=\pi_c\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\\&=\frac{u^c/c!}{\sum_{k=0}^{c-1}u^k/k!+u^c/c!(1-\rho)}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)^2}。\end{aligned}$$

此式即为式（87）。在上式的推导中利用了式（83）。

应用利特尔（Little）公式（参看文献［50］）$W_q=L_q/\lambda$ 及式（87）即得式（89）。进而因为

$$W=W_q+Es=W_q+\frac{1}{\mu},\tag{91}$$

再用式（89）即得式（90）。最后再利用利特尔公式：$L=\lambda W$，以及已证的式（90），代入即得式（88）。证完。

定理 7 在 $M/M/c$ 等待排队系统中，设 $\rho<1$，采用与前面相同的假设条件与记号之下，当系统达到稳定状态后则有等待时间分布

$$C_q(z)=P(w_q\leqslant z)=\begin{cases}1-p_We^{-\mu z(c-u)}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0。\end{cases}\tag{92}$$

$$\begin{aligned}C(z)&=p(w\leqslant z)=P(w_q+s\leqslant z)\\&=\begin{cases}1+\dfrac{(u-c+c_q(0))}{c-1-u}e^{-\mu z}+\dfrac{p_W}{c-1-u}e^{-c\mu z(1-\rho)}, & z\geqslant 0,u\neq c-1,\\ 1-[1+p_W\mu z]e^{-\mu z}, & z\geqslant 0,u=c-1,\\ 0, & z<0。\end{cases}\end{aligned}\tag{93}$$

其中 p_W 是由式（86）所给的来到服务机构的顾客必须排队等待的概率。

证 如果队长 $l\leqslant c-1$，那么来到的顾客立即可以得到服务，因而等待时间 $w_q=0$。如果队长 $l\geqslant c$，那么来到的顾客需要等待 $l-c+1$ 位顾客服务完毕之后，才能得到服务。由于有 c 位服务员，每离去一位顾客所需的时间服从参数为 $c\mu$ 的负指数分布，因而等待时间 w_q 应是 $l-c+1$ 个服从上述负指数分布的独立随机变量之和，故 w_q 是一个服从参数为 $l-c+1$ 和 $c\mu$ 的 Γ-分布的随机变量。于是对 $z\geqslant 0$，

$$P(w_q\leqslant z|l=k)=\int_0^z\frac{c\mu(c\mu x)^{k-c}}{(k-c)!}e^{-c\mu x}dx,\quad k\geqslant c。\tag{94}$$

利用式（83），则有

$$C_q(0) = P(w_q = 0) = P(l \leqslant c-1) = \sum_{k=0}^{c-1}\pi_k = \pi_0\sum_{k=0}^{c-1}\frac{u^k}{k!},$$

$$\sum_{k=c}^{\infty}\pi_k = \pi_c\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j = \pi_0 u^c/c!(1-\rho)。$$

$$1 = \sum_{k=0}^{c-1}\pi_k + \sum_{k=c}^{\infty}\pi_k = C_q(0) + \pi_0 u^c/c!(1-\rho),$$

故

$$C_q(0) = 1 - [\pi_0 u^c/c!(1-\rho)]。 \tag{95}$$

一般地，对 $z>0$，由式（83）及式（94）、(95)、(86)

$$\begin{aligned}
C_q(z) &= P(w_q \leqslant z) = P(w_q \leqslant z, l \leqslant c-1) + P(w_q \leqslant z, l \geqslant c)\\
&= P(l \leqslant c-1) + \sum_{k=c}^{\infty}P(l=k)P(w_q \leqslant z|l=k)\\
&= C_q(0) + \sum_{k=c}^{\infty}\pi_k\int_0^z \frac{c\mu(c\mu x)^{k-c}}{(k-c)!}e^{-c\mu x}dx\\
&= C_q(0) + \pi_0\frac{u^c}{(c-1)!}\int_0^z \mu e^{-c\mu x}\left(\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(\mu u x)^{k-c}}{(k-c)!}\right)dx\\
&= C_q(0) + \pi_0\frac{u^c}{(c-1)!}\int_0^z \mu e^{-c\mu x}e^{\mu u x}dx\\
&= C_q(0) + \pi_0\frac{u^c}{(c-1)!}\cdot\frac{1}{c-u}(1-e^{-\mu z(c-u)})\\
&= 1 - \frac{\pi_0 u^c}{c!(1-\rho)} + \frac{\pi_0 u^c}{(c-1)!}\frac{1}{(c-u)}(1-e^{-\mu z(c-u)})\\
&= 1 - \frac{\pi_0 u^c}{c!(1-\rho)}e^{-\mu z(c-u)} = 1 - p_W e^{-\mu z(c-u)}。
\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$P(w_q \leqslant z) = 0$ 是显然的。式（92）得证。

由于 w_q 与 s 相互独立，w_q+s 的分布可由已知的 w_q 与 s 的分布通过卷积公式算得式（93）。这里不再详细推导。

由式（92）知 $C_q(z)$ 的形式是比较简单的，因此容易求出 w_q 的各种分位数，例如对 p：$0<p<1$，p-分位数是满足下式的值 $T_q(p)$：$C_q(T_q(p)) = p$。解出此式即得

$$T_q(p) = \frac{1}{c\mu(1-\rho)}\ln\left(\frac{p_W}{1-p}\right)。 \tag{96}$$

现在回到例 16 上，$c=1$，$\rho=10/16$，$1/\mu=1/2$ h，从而 $\mu=2$，$\lambda=\rho\mu=5/4$。所以顾客必须排队等待的概率 $p_W=\rho=5/8$。

队长的平稳分布 $\{\pi_j = (1-\rho)\rho^j = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^j,\quad j=0,1,\cdots\}$。

平均队长 $L = \rho/(1-\rho) = 5/3$，平均等待队长 $L_q=\rho^2/1-\rho=25/24$。

平均逗留时间 $W=\frac{1}{\mu\ (1-\rho)}=4/3$ (h)，平均等待时间 $W_q = \rho/\mu(1-\rho) = 5/6$(h)。

等待时间 w_q 的分布 $C_q(z) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)z}, z \geqslant 0$。

逗留时间 w 的分布 $C(z) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)z}, z \geqslant 0$。

0.9-分位数 $T_q(0.9) = 4/3\ \ln(25/4) = 2.44$(h)

$P(w_q > \frac{1}{2}) = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)/2} = 5/8e^{-3/8} \approx 0.429\ 5$。

由上面算得的结果知：每次使用终端的平均时间是 30 min，但是平均等待时间却要

50 min，并且约有 43%的工程师的等待时间超过了 30 min。等待时间的确太长，要求增加终端是合理的。

定理 8 对 $M/M/1$ 等待排队系统，设 $\rho=u=\lambda/\mu<1$，当系统达到稳定状态后，在长为 T 的时间间隔内（T 值相当大），则

(i) 忙期的总长度及平均个数分别依次为

$$T_B=\frac{\lambda}{\mu}T,\quad Z(T_B)=T\frac{(\mu-\lambda)\lambda}{\mu}。\tag{97}$$

(ii) 单个忙期的平均长度为

$$T_B(1)=\frac{1}{\mu-\lambda}。\tag{98}$$

(iii) 单个忙期内所服务的顾客平均数为

$$N(T_B(1))=\frac{\mu}{\mu-\lambda}。\tag{99}$$

证 正如定理 5 的直观解释，对 $M/M/1$ 等待排队系统，当 $\lambda/\mu<1$ 时，λ/μ 就是单位时间内来到此服务机构的全体顾客所需的平均总服务时间，于是在相当长的时间 T 内，忙期的总长度 T_B 应为 $T\lambda/\mu$。

服务机构从变为闲置状态开始直至新顾客到来为止这段时间间隔即闲期的总长度就应为 $T-T_B=T\ (1-\lambda/\mu)$。而在时间 T 内，闲期的平均个数应为

$$\frac{T(1-\lambda/\mu)}{1/\lambda}=\lambda T(1-\lambda/\mu)。$$

由于各个忙期与各个闲期在时间轴上是依次相间排列的，所以在时间 T 内，忙期的平均个数亦应为

$$Z(T_B)=\lambda T(1-\lambda/\mu)=T\frac{(\mu-\lambda)}{\mu}\lambda。$$

从而单个忙期的平均长度应为

$$T_B(1)=\frac{T_B}{Z(T_B)}=\frac{1}{\mu-\lambda}。$$

既然在忙期内，每位顾客的平均服务时间为 $1/\mu$，那么单个忙期内所服务的顾客的平均数应为

$$N(T_B(1))=\frac{T_B(1)}{1/\mu}=\frac{\mu}{\mu-\lambda}。$$

定理证完。

仍考查例 16，取 $T=24(\text{h})$。那么忙期总长度 $T_B=15$ (h)，忙期平均个数 $Z(T_B)\approx[11.25]$，单个忙期的平均长度 $T_B(1)=4/3(\text{h})$ 即 1h20min，单个忙期内平均要为 $N(T_B(1))\approx 2.7$ 即约 3 位顾客服务。由此可见该服务员的工作量过于繁重。

现在若对例 16 中的门市部增添一个终端。试问这时的平均等待时间将是多少呢？显然现在变成了 $M/M/2$ 等待排队模型。因 $c=2$，故 $\lambda=5/4$，$\mu=2$ 不变，从而 $\rho=5/16$。利用公式 (83)、(89)、(86)、(96)、(92) 算得

$$u=\lambda/\mu=0.65。$$

$$\pi_0=\frac{1}{1+u+u^2/2(1-\rho)}=0.524。$$

$$W_q = \frac{\pi_0}{\lambda} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \approx 0.054\ 13(\text{h}) \approx 3.248\ \text{min}。$$

$$p_W = \pi_0 \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{(1-\rho)} \approx 0.148\ 8。$$

$$T_q(0.9) = \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \ln(10 p_W) \approx 0.144\ 5(\text{h}) = 8.67\ \text{min}。$$

$$P(w_q > \frac{1}{2}) = p_W e^{-\mu(1-u/2)} \approx 0.037\ 6,$$

上面的数据表明：因添置一个终端后，平均等待时间下降为 3.248 min，90%的工程师其等待时间不超过 8.67 min，而等待时间超过 30 min 的概率仅为 0.037 6。服务质量得到很大的改善。

现在假定添置的终端不放在原门市部而放在另一新设的门市部，试问使用效果又会怎样呢？试作一比较。这时相当于有两个 $M/M/1$ 等待排队系统，工程师们可随机地到这两个门市部中的任何一个使用终端。因此对每个终端而言，只是由于顾客来到的速率下降了一半，即 $\lambda=5/8$ 造成了一些影响，如 $\rho=5/16$。其它因素仍保持不变。于是利用 $M/M/1$ 等待排队模型公式同样可算得：

$$W_q \approx 0.227(\text{h}) \approx 13.64\ \text{min},\ T_q(0.9) \approx 0.828\ 5(\text{h}) \approx 49.72\ \text{min}。$$

$$P(w_q > \frac{1}{2}) \approx 0.157\ 0。$$

当然还可进一步考虑 3 个终端，4 个终端，…分别放在不同门市部的情形，用类似的方法计算得到（表 8 列出）的结果。

表 8 排队模型与相应的性能值

模 型	ρ	w_q (min)	T_q (0.9) min	$P\left(w_q > \frac{1}{2}\right)$
$M/M/2$	5/16	3.25	8.67	0.037 6
1 个 $M/M/1$	5/8	50	146.61	0.429 5
2 个 $M/M/1$	5/16	13.64	49.72	0.157 0
3 个 $M/M/1$	5/24	7.89	27.81	0.094 4
4 个 $M/M/1$	5/32	5.56	15.87	0.067 2
5 个 $M/M/1$	1/8	4.29	7.65	0.052 1
6 个 $M/M/1$	5/48	3.49	1.37	0.042 5

由表 8 中的数据可以看出：两个终端集中在一起使用与 5 或 6 个终端分散使用效果是相当的。若无特殊需要，一般应集中管理使用。

例 17[48] 某航空公司计划建造一个电话订票部，现在要确定应设置几个终端？根据以往的统计数据，在高峰时间每小时会有 36 个订票电话，假定其来到是随机的。每个订票平均需用 5 min 时间，又假定它服从负指数分布。当所有终端都忙时，可请订户稍事等候，但设计要求是来到的订户需要等待的概率应不大于 0.05，即 $p_W \leqslant 0.05$，又 99%以上的订户其等待时间不超过 1 min，即 $T_q(0.99) \leqslant 1$。

倘若安装了 c 个终端，那么这便是 $M/M/c$ 等待排队模型，相应的参数是：$\lambda=36/60=0.6,\mu=1/5$，$u=\lambda/\mu=3$。为使 $\rho=u/c<1$，那么 $c>3$，即 $c=4$，5，…。利用前面的公式可以算出终端台数与相应的性能数值，其结果列入表 9 中。由表 9 知：为了达到设计要求，需要安装 8 台终端。

表 9　终端台数与相应的性能值

c	ρ	p_W	$T_q(0.99)$(min)	W_q(min)
4	0.750 0	0.509 4	19.65	2.547
5	0.600 0	0.236 2	7.91	0.591
6	0.500 0	0.099 1	3.82	0.165
7	0.428 6	0.037 6	1.66	0.047
8	0.375 0	0.012 9	0.25	0.013

例 18[48]　某交互式计算机系统具有 20 个终端，每个终端的平均思考时间为 3 s，即使用终端的人为了思考和打入语句和命令平均每次所需的时间是 3 s，在这段时间里，计算机无需对终端进行服务。中央处理装置 CPU 的处理速度为每秒 50 万条指令。假定执行一次命令平均需要执行 10 万条指令，试问该系统的平均响应时间，即从发出申请到获得回答的时间是多少？CPU 的利用率又是多少？如果再增添 10 台终端，相应的性能指标会有什么变化，这对于我们有何启示。

若将中央处理装置 CPU 看作是服务员，将终端看作是顾客，因为只有 20 台终端，所以可能来到的顾客是有限的，最多为 $K=20$ 个，该服务系统所能容纳的最大顾客数也是 $K=20$，而服务员个数 $c=1$。假定请求服务的终端是按照参数为 $\lambda(>0)$ 的普阿松过程随机来到的。又 CPU 对终端的服务时间是服从参数为 $\mu(>0)$ 的负指数分布的随机变量，终端的思考时间是服从参数为 $\alpha(>0)$ 的负指数分布的随机变量。那么例 18 所述的问题就可看作是一个一般 $M/M/C/K/K$ 等待排队模型在 $c=1$，$K=20$ 的情形，而且

$$\frac{1}{\mu}=\frac{100\ 000}{500\ 000}=0.2(\mathrm{s}),\quad \frac{1}{\alpha}=3(\mathrm{s})。$$

为了回答例 18 的提问，先作一般性讨论。记 X_t 为时刻 t 正由 CPU 进行服务以及排队等待服务的终端总台数，仿照对 $M/M/c$ 等待排队模型或例 12 的讨论，可证 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 也是生灭过程。而且在它的密度矩阵的元素中，

$$\begin{cases}\lambda_j=(K-j)\alpha, & j=0,1,\cdots,K-1,\\ \mu_j=\begin{cases}j\mu, & \\ c\mu, & \end{cases} & \begin{matrix} j=1,2,\cdots,c,\\ j=c,c+1,\cdots,K。\end{matrix}\end{cases}\tag{100}$$

它具有平稳分布（参看式（62）、（63））：

$$\begin{cases}\pi_0=\left[\sum_{i=0}^{c}(C_K^i\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^i+\sum_{i=c+1}^{K}C_K^i\frac{i!}{c!c^{i-c}}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^i\right]^{-1},\\ \pi_j=\begin{cases}C_K^j\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^j\pi_0, & j=1,\cdots,c,\\ C_K^j\frac{j!}{c!c^{j-c}}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^j\pi_0, & j=c+1,\cdots,k。\end{cases}\end{cases}\tag{101}$$

由此进一步可以计算系统处在稳定情况下的平均等待队长 L_q 和平均等待时间 W_q：

$$L_q=\sum_{j=c+1}^{k}(j-c)\pi_j,\quad W_q=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\mu}\right)L_q}{K-L_q}。\tag{102}$$

等等。特别地，在 $c=1$ 时，可得下列简洁的公式：

$$\begin{cases}\pi_0=\left[\sum_{i=0}^{K}\frac{K!}{(K-i)!}\left(\frac{a}{\mu}\right)^i\right]^{-1},\\ \pi_j=\frac{K!}{(K-j)!}\left(\frac{a}{\mu}\right)^j\pi_0,\qquad j=1,\cdots,K。\end{cases}\tag{103}$$

$$\rho=p_W=1-\pi_0,\quad \lambda=\rho\mu=(1-\pi_0)\mu。\tag{104}$$

进而计算平均队长 L，由式 (103)

$$L=\sum_{j=1}^{K}j\pi_j=\sum_{j=1}^{K}j\frac{K!}{(K-j)!}\left(\frac{a}{\mu}\right)^j\pi_0。\tag{105}$$

为了使下面的推导简洁起见，记

$$z=\frac{a}{\mu},\quad a_j=\frac{K!}{(K-j)!},\quad j=1,2,\cdots,K,\quad f(z)=\sum_{j=1}^{K}a_jz^j。\tag{106}$$

于是利用式 (103)、(104)、(105)、(106) 容易验证

$$\pi_0=\frac{1}{1+f(z)},\quad \rho=\frac{f(z)}{1+f(z)},\quad L=\frac{zf'(z)}{1+f(z)},$$

$$L+\frac{\rho}{z}=\frac{zf'(z)}{1+f(z)}+\frac{f(z)}{z(1+f(z))}=\frac{1}{1+f(z)}\left[zf'(z)+\frac{f(z)}{z}\right]。\tag{107}$$

然而由式 (106)

$$zf'(z)=a_1z+2a_2z^2+\cdots+ja_jz^j+\cdots+(K-1)a_{K-1}z^{K-1}+Ka_Kz^K,$$

$$\frac{f(z)}{z}=a_1+a_2z+\cdots+a_{j+1}z^j+\cdots+a_kz^{K-1},$$

故

$$zf'(z)+\frac{f(z)}{z}=a_1+(a_1+a_2)z+\cdots+(ja_j+a_{j+1})z^j+\cdots+Ka_kz^K。\tag{108}$$

注意到

$$a_1=\frac{K!}{(K-1)!}=K,$$

$$ja_j+a_{j+1}=j\frac{K!}{(K-j)!}+\frac{K!}{(K-j-1)!}=\frac{K!}{(K-j-1)!}\left(\frac{j}{K-j}+1\right)$$

$$=K\cdot\frac{K!}{(K-j)!}=Ka_j,\quad j=1,\cdots,K-1。$$

代入式 (108) 中，即得

$$zf'(z)+\frac{f(z)}{z}=K+Ka_1z+\cdots+Ka_jz^j+\cdots+Ka_Kz^K=K(1+f(z))。$$

将此式代入式 (107) 中，便有

$$L+\frac{\rho}{z}=K,\quad 或\quad L=K-\frac{\rho\mu}{a}。\tag{109}$$

由式(88)与式(104)易得

$$L_q=L-\rho=K-\frac{\rho\mu}{a}-\rho=K-\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\mu}\right)。\tag{110}$$

再利用利特尔公式及 $W=W_q+1/\mu$ 得

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{K}{\lambda} - \frac{1}{\alpha}。 \tag{111}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{K}{\lambda} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\mu}。 \tag{112}$$

由此可见式(102)成立。

现在回到例 18，利用公式(103)、(104)及(111)可以算得 ($c = 1, K = 20, \mu = 5, \alpha = 1/3$)

$$\pi_0 = 0.045\,6, \quad \rho = 1 - \pi_0 = 0.954\,4, \quad \lambda = \mu\rho = 4.772,$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - \frac{1}{\alpha} = \frac{20}{4.772} - 3 \approx 1.191(\mathrm{s})。$$

倘若增添了 10 台终端，则终端总数 K 变成 30，其它的数据仍保持不变，即 $c=1, \mu=5, \alpha=1/3$，利用同样的公式算得

$$\pi_0 = 0.00\,022\,118, \rho = 0.99\,977\,882, \lambda = 5, W = 3(\mathrm{s})。$$

由此可见，增添了 10 台终端对 CPU 的利用率仅仅提高了 0.0 454，不到 5%，但却使响应时间从 1.19 s 猛升到 3 s，增加了 151.9%，因此在目前的场合下，增添 10 台终端是不可取的。例 18 表明：终端并非越多越好，应当根据用户的需求情况及 CPU 的处理速度等因素来优化确定其台数。

下面再来介绍马尔科夫排队网络及其应用 。由多个排队服务系统按一定方式组合为一个更复杂的总的排队服务系统这便构成一个**排队网络**。所谓**马尔科夫排队网络**是指从网络中各排队服务机构的外部来到该服务机构的顾客，其时间是按普阿松过程来到的，而且各服务机构对顾客的服务时间都是服从负指数分布随机变量的排队网络。相对于排队网络而言，若顾客既可以自该网络之外来到，又可离开该网络而去，称这样的排队网络为**开排队网络**。若相对于排队网络而言，既不允许顾客离开，也不允许顾客从外进入，在网络里顾客总数保持一常值不变，则称之为**闭排队网络**。下面不加证明地给出两个定理，它们在解决马尔科夫排队网络问题中是有用的。

定理 9 设开马尔科夫排队网络由 N 个 $M/M/c$ 的排队系统组成。对 $i=1, \cdots, N$，第 i 个排队系统有 c_i 个服务员，各个服务员的工作相互独立。对顾客的平均服务时间都为 $1/\mu_i$，顾客依照参数为 γ_i 的普阿松过程从网络外部来到第 i 个排队系统。对任何 $i, j=1, \cdots, N$，在第 i 个服务机构服务完毕的顾客以概率 r_{ij} 到第 j 个服务机构排队等待服务，以概率 $1 - \sum_{j=1}^{N} r_{ij}$ 离开整个排队网络。记 λ_i 为顾客来到第 i 个服务机构的总平均到达速率，即顾客从网络之外来到网络中第 i 个服务机构的到达速率 γ_i 与从网络中其它服务机构来到第 i 个服务机构的所有到达速率之总和，则 λ_i，$i=1, \cdots, N$ 满足方程组：

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji}, \qquad i = 1, \cdots, N。 \tag{113}$$

如果用 $l_i (i = 1, \cdots, N)$ 分别表示排队网络达到稳定时第 i 个排队系统的队长，则在 $\lambda_i < c_i\mu_i$，$i=1, \cdots, N$ 的条件下，对任何 $k_1, k_2, \cdots, k_N = 0, 1, \cdots$，有

$$P(l_1 = k_1, l_2 = k_2, \cdots, l_N = k_N) = P(l_1 = k_1)P(l_2 = k_2)\cdots P(l_N = k_N)。 \tag{114}$$

其中 $P(l_i = k_i)(i = 1, \cdots, N)$ 是相应参数为 λ_i，μ_i 的 $M/M/c_i$ 等待排队系统中队长的平稳分布。

可以对定理 9 作以下的直观说明：在由 N 个 $M/M/c_i$，$i=1$，…，N 排队系统构成的马尔科夫网络中，如果对每个 $i=1$，…，N，把先后到达第 i 个服务机构的所有顾客合在一起，都看成是强度为 $\bar{\lambda}_i$ 的普阿松输入过程，那么每个服务机构都是独立的，从而整个排队网络在稳定情形下的状态概率应是每个排队系统在稳定情形下相应状态概率的乘积，这正是式(114)的含义。

对每个 $i=1$，…，N，来到第 i 个服务机构的总的顾客输入过程之所以是普阿松过程可解释如下：

(i) 从排队网络外部来到第 i 个服务机构的顾客输入过程是普阿松过程；

(ii) 对于 $M/M/c$ 等待排队系统，顾客输入过程是普阿松过程，输出也是普阿松过程，普阿松过程的子过程也是普阿松过程，因而由此流入其它排队服务机构的顾客也形成一普阿松过程；

(iii) 独立的普阿松过程之和仍是普阿松过程。

综合以上理由，便知来到每个服务机构的顾客输入过程是普阿松过程。

定理 10　设闭马尔科夫排队网络由 N 个 $M/M/c$ 的排队系统组成。对每个 $i=1,\cdots,N$，第 i 个排队系统有 c_i 个服务员，各个服务员的工作是相互独立的。对顾客的平均服务时间都为 $1/\mu_i$。排队网络中共有 K 位顾客，它们只在这 N 个排队系统之间转移，不能走出网络，网络之外也无顾客来到。对 i，$j=1$，…，N，记 r_{ij}为在第 i 个服务机构服务完毕的顾客转移到第 j 个服务机构等待服务的概率，记 $\bar{\lambda}_i$ 为顾客来到第 i 个服务机构的总平均到达速率，则 $\bar{\lambda}_i$，$i=1$，…，N 满足方程组：

$$\bar{\lambda}_i=\sum_{j=1}^{N}\bar{\lambda}_j r_{ji},\qquad i=1,\cdots,N。\tag{115}$$

仍记 $l_i(i=1,\cdots,N)$ 为排队网络达到稳定时第 i 个排队系统的队长，则在网络达到稳定后，对于 $A=\{(k_1,k_2,\cdots,k_N):k_1,k_2,\cdots,k_N\geqslant 0,k_1+k_2+\cdots+k_N=K\}$ 中的任何向量 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 有

$$P(l_1=k_1,l_2=k_2,\cdots,l_N=k_N)=\frac{1}{G(K,N)}\prod_{i=1}^{N}\frac{x_i^{k_i}}{\beta_i(k_i)}\tag{116}$$

其中，x_i，$i=1$，…，N 是下列线性方程组的解：

$$\mu_i x_i=\sum_{j=1}^{N}\mu_j x_j r_{ji},\quad i=1,\cdots,N,\tag{117}$$

$$G(K,N)=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_N)\in A}\ \prod_{i=1}^{N}\frac{x_i^{k_i}}{\beta_i(k_i)}\tag{118}$$

$$\beta_i(k_i)=\begin{cases}k_i!, & k_i\leqslant c_i,\\ c_i!c_i^{k_i-c_i}, & k_i\geqslant c_i,\end{cases}\quad i=1,\cdots,N。\tag{119}$$

有了队长的平稳分布式(116)后，由此就可计算出平均队长与平均等待时间等等性能指标。

例 19　在由图 1 二阶段循环排队模型所描述的多重程序的计算机系统中，假定到达规律是遵循到达速率为 λ 的普阿松过程，中央处理机、输入输出器的服务时间分别依次服从参数为 μ_1、μ_2 的负指数分布。到达的程序在中央处理机处排队等待服务，一旦处理完毕，该程序以概率 p 离开系统或以概率 $1-p$ 转到输入输出器处排队等待服务。当程序在输入输出器处服务完成后，便再回到中央处理机处排队，重复进行这种循环直到该程序的全部操作

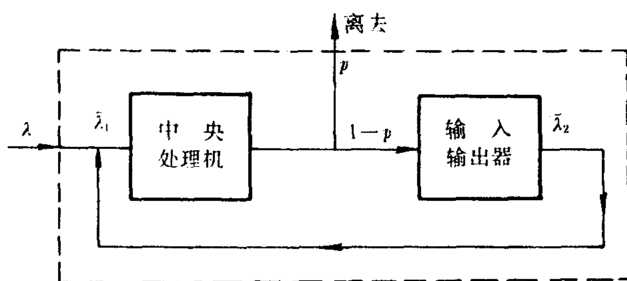


图1 二阶段循环系统

完成为止。这里假定等待空间是无限的。显然，此系统是开马尔科夫排队网络。如果已知以下具体数据：平均一个程序需占用中央处理机 4 s；由于中央处理机的输入或输出需要 0.25 s 中断一次；输入输出器平均服务时间是 0.2 s；计算机每天工作 10 h，平均完成 8 000 个程序。试求：

(i) 中央处理机、输入输出器的服务强度；

(ii) 中央处理机处的平均程序数；

(iii) 输入输出器处的平均程序数；

(iv) 排队网络的平均程序数；

(v) 计算机的平均响应时间。

在该系统已达到稳定的状态下，用 $\bar{\lambda}_1$、$\bar{\lambda}_2$ 分别依次表示中央处理机、输入输出器的总平均到达速率，由定理 9 及式(113)，并注意到在这里 $\gamma_1=\lambda$，$\gamma_2=0$，$r_{11}=r_{22}=0$，$r_{12}=1-p$，$r_{21}=1$，则有

$$\begin{cases}\bar{\lambda}_1 = \lambda + \bar{\lambda}_2,\\ \bar{\lambda}_2 = (1-p)\bar{\lambda}_1,\end{cases}$$

故解得

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda}{p}, \qquad \bar{\lambda}_2 = \frac{(1-p)\lambda}{p} \tag{120}$$

记 ρ_1、ρ_2 分别依次为中央处理机、输入输出器的服务强度，又注意到这里 $c_1=c_2=1$，于是由式(120)得

$$\rho_1 = \frac{\bar{\lambda}_1}{\mu_1} = \frac{\lambda}{\mu_1 p}, \qquad \rho_2 = \frac{\bar{\lambda}_2}{\mu_2} = \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2 p}。 \tag{121}$$

利用已给的数据，$\lambda=8\,000/36\,000=2/9$（个/s）。完成一个程序平均需中断次数是 $4/0.25=16$（次），因此 $p=1/16$。又 $1/\mu_1=0.25$ (s)，$1/\mu_2=0.2$ (s)，于是由式(120)与式(121)得到问题 (i) 的解答：

$$\bar{\lambda}_1 = 16 \times \frac{2}{9} = \frac{32}{9}(\text{个 /s}), \qquad \bar{\lambda}_2 = \frac{15}{16} \times \frac{32}{9} = \frac{10}{3}(\text{个 /s})。$$

$$\rho_1 = \frac{32}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{9} < 1, \qquad \rho_2 = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3} < 1。$$

现在的中央处理机、输入输出器实际上都是 $M/M/1/\infty$ 等待排队系统，用 $P(l_1=k_1)$，$k_1=0,1,\cdots$ 与 $P(l_2=k_2)$，$k_2=0,1,\cdots$ 分别依次表示它们的队长的平稳分布，由式(85)知

$$\begin{cases} P(l_1 = k_1) = (1-\rho_1)\rho_1^{k_1} = \dfrac{1}{9}\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^{k_1}, & k_1 = 0,1,\cdots, \\ P(l_2 = k_2) = (1-\rho_2)\rho_2^{k_2} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k_2}, & k_2 = 0,1,\cdots。\end{cases} \tag{122}$$

根据定理 9 中的式(114)可得整个网络的平稳分布为

$$P(l_1 = k_1, l_2 = k_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{k_1}(1-\rho_2)\rho_2^{k_2} = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k_1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k_2},\ k_1,k_2 = 0,1,\cdots。 \tag{123}$$

由式(122)可算出在系统达到稳定状态下中央处理机与输入输出器处的平均队长即平均程序数如下：

$$\begin{aligned} El_1 &= \sum_{k_1=0}^{\infty} k_1(1-\rho_1)\rho_1^{k_1} = (1-\rho_1)\rho_1\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\rho^{k_1}\right)' \\ &= (1-\rho_1)\rho_1\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)' = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}, \end{aligned} \tag{124}$$

同理

$$El_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}。 \tag{125}$$

将数据代入式(124)、(125)中，得 $El_1=8$（个），$El_2=2$（个）。于是整个网络的平均队长即平均程序数为

$$El = El_1 + El_2 = 8 + 2 = 10。 \tag{126}$$

利用式(121)、(124)、(125)及利特尔公式便得计算机平均响应时间即平均等待时间

$$W = Ew = \frac{E(l)}{\lambda} = \frac{1}{p\mu_1(1-\rho_1)} + \frac{(1-p)}{p\mu_2(1-\rho_2)}, \tag{127}$$

代入数据 $W=10/\left(\dfrac{2}{9}\right)=45$ (s)。(ii) — (iv) 的提问全部解答完毕，由此看出：对于一个程序平均用机时 4 s，而需用输入输出器 15 次，每次平均用机时 0.2 s，共用机时 $15\times0.2=3$ s，但响应时间是 45 s 的确太长了。

对例 19 中给出的网络，若限定网络中的程序数始终保持为 K，当一个程序完成时，立刻有一个程序进入网络系统并在中央处理机处排队，这样该网络就可看成是一闭网络。利用定理 10 可以算出该网络系统达到稳定状态时的队长的联合分布，中央处理机、输入输出器的服务强度，一个程序的平均响应时间等等。所得的具体结果与详细的推导过程参看文献 [50]，这里不再列出。

保证计算机系统正常运转不出现故障当然是人们最关心的实际问题，常用来刻画系统这一性能的指标是**可靠度函数**或**可靠度** $R(t)$，$t\geqslant0$，$R(t)$表示在时间段 $[0, t]$ 内计算机系统未出故障正常工作的概率。也可采用叫做可用度的性能指标，对指定的时刻 $t(\geqslant 0)$，系统在 t 时处于正常运转状态的概率 $A(t)$称为系统在时刻 t 的**瞬时可用度**。若极限 $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)$ 存在，记为 A，则称 A 为该系统的**稳态可用度**，它表示该系统在长期运行的时间进程中，大约有比例为 A 的时间里系统是处在正常运转的状态。

例 20　设某大计算机系统是由 N 个子系统组成，对 $i=1, \cdots, N$，第 i 个子系统的正常工作时间服从参数为 $\lambda_i(>0)$ 的指数分布。一旦出现故障，即进行修理，修复的时间是服从参数为 $\mu_i(>0)$ 的指数分布的随机变量，修复后即继续进行正常工作。各个子系统的运行

状况是相互独立的。试求整个大计算机系统的稳态可用度。先作一直观解释。由假设第 i 个子系统平均正常工作的时间为 $1/\lambda_i$，平均修复时间为 $1/\mu_i$，因此，一个工作-修复周期的平均长度为 $1/\lambda_i+1/\mu_i$，从而其中工作时间所占的比例为

$$\frac{1/\lambda_i}{1/\lambda_i + 1/\mu_i} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i},$$

这就是第 i 个子系统的稳态可用度。再由独立性假设，那么整个系统的稳态可用度，即每个子系统都在正常工作的概率应为 $\pi_0 = \prod_{i=1}^{N} \mu_i/\lambda_i + \mu_i$。

下面再给出严格的论述。为简便起见只对 $N=2$ 的情形进行讨论。以"0"表示两个子系统均在正常工作的状态，以"1"表示第一个子系统失效修理，而第二个子系统正常工作的状态，以"2"表示第一个子系统正常工作，而第二个子系统失效修理的状态，以"3"表示两个子系统均在失效修理的状态。若以 X_t 表示在时刻 t 整个系统所处的状态，则 $\{X_t, t \geqslant 0\}$ 是具有上述四个状态的马氏链，其密度矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -(\mu_2+\lambda_1) & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix} \tag{128}$$

于是平稳分布应满足的方程组是

$$\begin{cases} (\lambda_1+\lambda_2)z_0 = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2, \\ (\mu_1+\lambda_2)z_1 = \lambda_1 z_0 + \mu_2 z_3, \\ (\mu_2+\lambda_1)z_2 = \lambda_2 z_0 + \mu_1 z_3, \\ (\mu_1+\mu_2)z_3 = \lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2。 \end{cases} \tag{129}$$

容易求解此方程组得

$$z_0 = \mu_1\mu_2, \quad z_1 = \lambda_1\mu_2, \quad z_2 = \lambda_2\mu_1, \quad z_3 = \lambda_1\lambda_2。 \tag{130}$$

由 $\sum_{j=0}^{3} z_j = (\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)$ 便得平稳分布：

$$\pi_0 = \frac{\mu_1\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda_1\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)},$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_2\mu_1}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)}, \quad \pi_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)}。 \tag{131}$$

故要求的稳态可用度为 $\pi_0 = \mu_1\mu_2/(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)$。于是对一般的 N，系统的稳态可用度为

$$\pi_0 = \prod_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{(\lambda_i+\mu_i)} \tag{132}$$

值得提醒读者的是由式(128)知：$\{X_t, t\geqslant 0\}$ 不是生灭过程。

应用马氏链建立相应的可靠性和可用性模型。并计算出它的一些可靠性指标，对此已有不少专著（如文献 [51]、[52]）作了介绍。总之，目前马氏链理论已经成为分析研究计算机系统的基本数学工具之一（参看文献 [53]、[54]）。

§5　马尔科夫链在物理学与化学中的应用

1. 马尔科夫链在物理学中的简单应用

马尔科夫过程理论的发展与物理学中的扩散过程、放射现象、布朗（Brown）运动的研究是密切相关的。马氏过程在物理学中的应用不仅已有很长的历史，而且是多方面的。至今两者之间仍然保持着互相促进共同发展的趋势。

例21　设有 N 个气体分子，因受射线作用而可能电离，一个分子电离的强度为 $\lambda(>0)$。另一方面，也可能有正离子和负离子复合成中性分子，一个正离子的复合强度为 $\mu(>0)$。对 $t\geqslant 0$，记 X_t 为时刻 t 含有正离子的个数（正离子的个数与负离子的个数相同）。显然 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是状态空间为 $\{0,\ 1,\ \cdots,\ N\}$ 的齐次马氏链，而且 $X_0=0$。

对任何状态 $i=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$，从状态 i 到状态 $i+1$ 的转移强度应等于 $N-i$ 个中性分子中有一个被电离的强度，即应为 $(N-i)\lambda$。对任何 $i=1,\ \cdots,\ N$，从状态 i 到状态 $i-1$ 的转移强度是 i 个正离子中有一个被复合了的强度，因此应等于 $i\mu$。于是密度矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix} -N\lambda & N\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu & -[\mu+(N-1)\lambda] & (N-1)\lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & (N-1)\mu & -[(N-1)\mu+\lambda] & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & N\mu & -N\mu \end{bmatrix}。\tag{133}$$

由式(133)平稳分布 $[\pi_0,\ \pi_1,\ \cdots,\ \pi_N]$ 应满足的方程组为

$$\begin{cases} N\lambda\pi_0=\mu\pi_1, \\ [(N-i)\lambda+i\mu]\pi_i=\lambda(N-i+1)\pi_{i-1}+(i+1)\mu\pi_{i+1}, \quad i=1,\cdots,N-1, \\ N\mu\pi_N=\lambda\pi_{N-1}。\end{cases}\tag{134}$$

由式(134)的第一式得 $\pi_1=N(\lambda/\mu)\pi_0$。将此结果代入式(134)中的第二式得

$$[(N-1)\lambda+\mu]\pi_1=N\lambda\pi_0+2\mu\pi_2,$$

$$\pi_2=\frac{1}{2\mu}\left\{[(N-1)\lambda+\mu]N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0-N\lambda\pi_0\right\}$$

$$=\frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0=C_N^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0。$$

如同上面两式，逐步递推下去，一般可得

$$\pi_i=C_N^i\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\pi_0, \quad i=1,\cdots,N,\tag{135}$$

将式(135)代入方程组(134)中验证确实成立。

其次，由式(135)得

$$1=\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_N$$

$$=\pi_0\left[1+C_N^1\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+C_N^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N\right]=\pi_0\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^N。$$

从而

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{\mu^N}{(\lambda+\mu)^N}, \\ \pi_i = C_N^i\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i\left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{N-i}, \quad i = 1,\cdots,N。\end{cases} \tag{136}$$

这就表明该马氏链的平稳分布是具有参数为$\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$的二项分布。

例 22 分支过程可以近似地作为原子核连锁反应以致发生爆炸的数学模型。一个中子与其它质点之间的相互随机碰撞，或受到其它射线的轰击，每隔一个单位时间，它将分裂成多个中子，产生 k 个中子的概率记为 g_k，$k=1,2,\cdots$，g_0 是一个中子没有裂变而湮灭的概率。假定各个中子的裂变情况是相互独立的，并具有同样的概率规律，即每一个中子裂变出新的中子数都是一个随机变量，而且这些随机变量是相互独立的，并具有共同分布 $[g_0, g_1, \cdots]$。以 X_n 记在原子核连锁反应进程中于时刻 n 的中子数，初始的中子数为 $X_0=i\geqslant 1$。那么$\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$就是例 6 中所定义的离散参数的分支过程。

若记 $\mu=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kg_k$，即 μ 为一个中子经一次裂变产生的中子平均数。又记 $\mu_n=EX_n$，$n=1, 2, \cdots$为 n 时刻参加连锁反应的中子平均数。由定理 1 知：$\mu_n=i\mu^n$，$n=1, 2, \cdots$，$i=1, 2, \cdots$。由此可见当 $\mu>1$ 而且其值较大时，同时 i 也较大时，那么在很短的时间内将裂变产生出大量的中子数从而导致爆炸。

例 23 为研究一确定容器内气体分子间的热传导现象，在第一章的例 2 中给出了爱伦菲斯特模型。其实，它就是状态空间为$\{-N, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, N\}$的齐次马氏链$\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$，它的一步转移概率矩阵是

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2N} & 0 & 1-\frac{1}{2N} & 0\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots\ \cdots & & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ \cdots & & \cdots & \cdots\ 0 & \frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{N}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{i}{N}\right) & 0\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots\ \cdots & & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ \cdots & & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & 1-\frac{1}{2N} & 0 & \frac{1}{2N} \\ 0\ \cdots & & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{137}$$

由式(137)知状态空间中的任何两个状态都是互通的，$\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$是一个不可分、正常返、非周期马氏链，必存在唯一的平稳分布。由式(137)及Ⅱ. 式(29)，平稳分布应满足下面的方程组：

$$\begin{cases} z_{-N} = \dfrac{1}{2N} z_{-N+1}, \\ z_{-N+1} = z_{-N} + \dfrac{1}{N} z_{-N+2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ z_i = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{i-1}{N}\right) z_{i-1} + \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{i+1}{N}\right) z_{i+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ z_{N-1} = \dfrac{1}{N} z_{N-2} + z_N, \\ z_N = \dfrac{1}{2N} z_{N-1}。 \end{cases} \tag{138}$$

故

$$\begin{cases} z_{-N+1} = 2N z_{-N}, \\ z_{-N+2} = N z_{-N+1} - N z_{-N} = N(2N-1) z_{-N}, \\ z_{i+1} = \dfrac{2N}{N+i+1} z_i - \dfrac{N-i+1}{N+i+1} z_{i-1}, \quad i = -N+1, \cdots, N-1, \\ z_N = \dfrac{1}{2N} z_{N-1}。 \end{cases} \tag{139}$$

由式(139)知：z_{-N+1}可由z_{-N}表示，利用此表示式推出z_{-N+2}也可由z_{-N}表示，如此逐步递推地得到z_{-N+3}，…，z_0，z_1，…，z_{N-1}，z_N都可由z_{-N}表示的式子。然后利用$\sum_{i=-N}^{N} z_i = 1$，便可解出z_{-N}的值，进而得z_{-N+1}，z_{-N+2}，…，z_0，z_1，…，z_{N-1}，z_N的值，这就是要求的平稳分布。

例 24　考查一个与外界相通开放的容器内某种物质分子的变迁。设在单位时间内，容器中的每个分子都是以概率$p(>0)$留在容器内，以概率$q = 1 - p(>0)$逸出。与此同时，又有新的分子从容器外进入该容器内，而且进入的新分子数是服从参数为$\lambda(>0)$的普阿松分布。假定各个分子的运动都是相互独立的。记X_n为n时刻容器中分子的总数。显然，下一个单位时刻容器内的分子数只取决于现在容器内的分子数及新进入的分子数，而与以前容器中的分子数无关。因此$\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$是马氏链，状态空间为$\{0, 1, 2, \cdots\}$。假定此链是齐次的。

下面将给出一步转移概率p_{ij}，i，$j=0$，1，…。若$X_n=i$，假设在容器内现有的i个分子中有k个留下，而有$i-k$个分子逸出，那么要使$X_{n+1}=j$，必须要有$j-k$个新的分子进入容器，容易看出应有$k\leqslant i$，$k\leqslant j$，所以k的变化范围是从0到$\min(i,j)$。既然假定了各个分子的运动是相互独立的，因此有

$$p_{ij} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} C_i^k p^k q^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda}, \quad i,j = 0,1,\cdots。 \tag{140}$$

有关马氏过程在物理学中应用的更加深入更加详实的材料可参阅文献 [43]、[55]。

2. 马尔科夫链在化学中的简单应用

在探讨化学反应速度、影响反应速度的主要因素以及各种化学反应的机理时，考查各种化学反应物在t时刻的浓度，即定量体积内的分子数，确定这些浓度的概率分布时，马氏

链是常要采用的数学模型。

例25 一级单分子化学反应可表示成如下的形式：



$$A \xrightarrow{k} E。$$

反应物 A 不可逆地转化为生成物 E，已知的正常数 k 是化学反应率。现在建立它的随机数学模型。对任何 $t\geqslant0$，记随机变量 X_t 为反应物 A 在时刻 t 的浓度，并令 $X_0=i_0>0$，$p_j(t)=P(X_t=j)$，$j=0,1,\cdots,i_0$，$p_j(t)$ 表示在时刻 t 反应物 A 的浓度为 j 的概率。根据单分子化学反应的物理性质，可作下列理想化了的假定：

(i) 在区间 $(0,t)$ 内恰好发生了 i_0-j 次转化，即在 t 时刻 A 的浓度 X_t 等于 j 的条件下，在 $(t,t+\Delta t)$ 时间区间内，A 的 j 个分子中发生了一个转化的概率为 $kj\Delta t+o(\Delta t)$；

(ii) 在 $(t,t+\Delta t)$ 时间区间内，发生二个及二个以上的分子转化的概率为 $o(\Delta t)$；

(iii) 在 $(t,t+\Delta t)$ 时间区间内，A 的 j 个分子都没有发生转化的概率为 $1-kj\Delta t+o(\Delta t)$；

(iv) 出现逆反应 $E\rightarrow A$ 的概率为零；

(v) 反应物 A 中分子的活动状况与生成物 E 中分子的活动状况是相互独立的。

在上述的假定下，利用全概率公式可写出 $p_j(t+\Delta t)$ 的表达式，进而推导出 $p_j(t)$ 应满足的差分微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dp_j(t)}{dt}=-kj\,p_j(t)+k(j+1)p_{j+1}(t), \qquad j=0,1,\cdots,i_0-1, \\ \dfrac{dp_{i_0}(t)}{dt}=-ki_0p_{i_0}(t)。\end{cases} \tag{141}$$

初始条件应为

$$p_j(0)=\begin{cases}1, & j=i_0, \\ 0, & j\neq i_0。\end{cases} \tag{142}$$

方程组(141)实际上是第八章中所考虑的纯灭过程的绝对概率函数应满足的方程，解此方程组(141)、(142)得：

$$p_j(t)=C_{i_0}^{j}\,e^{-i_0kt}[e^{kt}-1]^{i_0-j}, \qquad j=0,1,\cdots,i_0, \quad t\geqslant0。 \tag{143}$$

还可算得在 t 时刻 A 的浓度的平均值与方差分别依次为

$$EX_t=i_0e^{-kt}, \quad DX_t=i_0e^{-kt}[1-e^{-kt}], \quad t\geqslant0。 \tag{144}$$

例26 由两个分子结合生成一个新的分子的化学反应称为**双分子化学反应**。譬如一种由两类分子 A 和 B 组成的液体，反应物 A 的一个分子与反应物 B 的一个分子相互碰撞后，以概率1生成一个新的 E 分子，可表示呈 $A+B\rightarrow E$ 的形式。设随机变量 $X_t(1)$、$X_t(2)$、$X_t(3)$ 分别依次表示 t 时刻在液体中 A、B、E 的分子数，又设 i_{10}、i_{20}、i_{30} $(\geqslant0)$ 分别依次表示初始时刻 $(t=0)$ A、B、E 的分子数，即 $X_0(1)=i_{10}$、$X_0(2)=i_{20}$、$X_0(3)=i_{30}$，容易看出：$X_t(1)=i_{10}-X_t(3)$，$X_t(2)=i_{20}-X_t(3)$。

我们最关心的是生成物的分子数 $X_t(3)$，$t\geqslant0$。令 $p_{j_3}(t)=P(X_t(3)=j_3)$，$j_3=0,1,\cdots,m$，$m=\min(i_{10},i_{20})$，即 $p_{j_3}(t)$ 为生成物 E 在时刻 t 有 j_3 个分子的概率。根据已有的实践知识，可作下列假定：

(i) 在时刻 t E 已含有 j_3 个分子的条件下，在 $(t,t+\Delta t)$ 时间区间内生成物 E 增加一个分子，即任何一个 A 的分子与任何一个 B 的分子发生一次碰撞的概率为 $\lambda(i_{10}-j_3)(j_{20}$

$-j_3)\Delta t+o(\Delta t)$；

(ii) 在 $(t,t+\Delta t)$ 时间区间内生成二个或二个以上 E 分子的概率为 $o(\Delta t)$；

(iii) 在 $(t,t+\Delta t)$ 时间区间内没有 E 分子生成的概率为 $1-\lambda(i_{10}-j_3)(i_{20}-j_3)\Delta t+o(\Delta t)$。

记 $h(j_3)=(i_{10}-j_3)(i_{20}-j_3)$，$j_3=0，1，\cdots，m$。利用概率的性质可得：

$$p_{j_3}(t+\Delta t)=[1-\lambda h(j_3)\Delta t]\,p_{j_3}(t)+\lambda h(j_3-1)\Delta t\,p_{j_3-1}(t)+o(\Delta t), \tag{145}$$

用 Δt 除式(145)的两边，并令 $\Delta t\to 0_+$ 便得差分微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dp_{j_3}(t)}{dt}=\lambda\left[h(j_3-1)p_{j_3-1}(t)-h(j_3)p_{j_3}(t)\right], & j_3=1,\cdots,m,\\[2mm] \dfrac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda h(j_3)p_0(t)。\end{cases} \tag{146}$$

初始条件应为

$$p_{j_3}(0)=\begin{cases}1, & j_3=0,\\ 0, & j_3=1,\cdots,m。\end{cases} \tag{147}$$

利用拉普拉斯变换与反变换方法解方程组(146)，得到满足初始条件式(147)的解为

$$p_{j_3}(t)=\sum_{i=0}^{j_3}e^{-\lambda h(i)t}\left[\prod_{i=0}^{j_3-1}h(i)\right]\left[\prod_{\substack{j\neq i\\0\leqslant j\leqslant j_3}}\frac{1}{h(j)-h(i)}\right],$$
$$j_3=0,1,\cdots,m,\quad t\geqslant 0。 \tag{148}$$

记 $M(t)$ 为 t 时刻生成物 E 中分子数的期望值，即

$$M(t)=EX_t(3)=\sum_{j_3=0}^{m}j_3p_{j_3}(t)。 \tag{149}$$

先建立 $M(t)$ 所满足的微分方程，然后略去影响很小的项而得到它的简化近似方程组，并求得近似解：

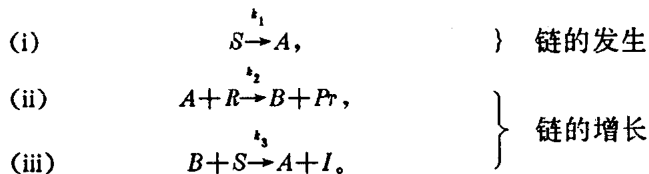
$$M(t)=\frac{e^{-\lambda i_{10}t}-e^{-\lambda i_{20}t}}{\dfrac{1}{i_{10}}e^{\lambda-i_{10}t}-\dfrac{1}{i_{20}}e^{\lambda-i_{20}t}},\qquad t\geqslant 0 \tag{150}$$

对于小的 t 值，$M(t)$ 近似为 $i_{10}\,i_{20}\,t$，而对 $t\to\infty$ 时有

$$\lim_{t\to\infty}M(t)=\min(i_{10},i_{20})。 \tag{151}$$

关于式(148)、(150)、(151)的推导与论述参看文献[43]。

例27　许多化学工艺过程如石油的热裂、高能燃料的燃烧等都与一种更为复杂的化学反应，即链式反应有关。现在考虑一种可用下列反应形式来描述的直链反应：



链的发生（(i)）

链的增长（(ii)、(iii)）

其中，第 (i) 步表示反应物 S 通过一级反应生成一个活化分子 A；第 (ii) 步表示 A 与反应物 R 的二级反应，生成一个活化分子 B 和生成物 Pr；第 (iii) 步表示活化分子 B 与 S 的二级反应，产生活化分子 A 和一个惰性物质 I。k_1、k_2、k_3分别是第 (i)、(ii)、(iii) 步的反应速率。

我们最关注的是活化分子 A、B 及反应物 Pr 在整个化学反应过程中的变化。用 $X_t(1)$、$X_t(2)$、$X_t(3)$ 分别依次表示在 t 时刻 A、B、Pr 各自的分子数，记

$$p_t(j_1,j_2,j_3) = P(X_t(1) = j_1, \quad X_t(2) = j_2, \quad X_t(3) = j_3),$$

即在 t 时刻 A、B、Pr 各自的分子数分别依次为 j_1、j_2、j_3的概率。又令 s、r 分别依次表示$t=0$ 时 S、R 的分子数。为了要导出描述这种直链反应历程的微分方程组，必须要考虑在时间区间 $(t,t+\Delta t)$ 内 $(X_t(1),X_t(2),X_t(3))$ 到 $(X_{t+\Delta t}(1),X_{t+\Delta t}(2),X_{t+\Delta t}(3))$ 的转移，从状态 (j_1,j_2,j_3) 到其它状态的可能转移，以及从其它状态到 (j_1,j_2,j_3) 的转移。先给出从 (j_1,j_2,j_3) 到其它状态的转移的相应概率：

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad P\{(j_1,j_2,j_3) \to (j_1+1,j_2,j_3)\} \\ \qquad\qquad = k_1(s-j_1-j_2)\Delta t + o(\Delta t), \\ \text{(ii)} \quad P\{(j_1,j_2,j_3) \to (j_1-1,j_2+1,j_3+1)\} \\ \qquad\qquad = k_2(r-j_3)j_1\Delta t + o(\Delta t), \\ \text{(iii)} \quad P\{(j_1,j_2,j_3) \to (j_1+1,j_2-1,j_3)\} \\ \qquad\qquad = k_2(s-j_1-j_2)j_2\Delta t + o(\Delta t)。 \end{cases} \tag{152}$$

又从其它状态到状态 (j_1,j_2,j_3) 转移的相应概率为

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad P\{(j_1-1,j_2,j_3) \to (j_1,j_2,j_3)\} \\ \qquad\qquad = k_1(s-j_1+1-j_2)\Delta t + o(\Delta t), \\ \text{(ii)} \quad P\{(j_1+1,j_2-1,j_3-1) \to (j_1,j_2,j_3)\} \\ \qquad\qquad = k_2(r-j_3+1)(j_1+1)\Delta t + o(\Delta t), \\ \text{(iii)} \quad P\{(j_1-1,j_2+1,j_3) \to (j_1,j_2,j_3)\} \\ \qquad\qquad = k_3(s-j_1-j_2)(j_2+1)\Delta t + o(\Delta t)。 \end{cases} \tag{153}$$

利用式(152)、(153)可以建立 $p_t(j_1,j_2,j_3)$ 所满足的微分方程组：

$$\begin{aligned} \frac{dp_t(j_1,j_2,j_3)}{dt} &= k_1(s-j_1+1-j_2)p_t(j_1-1,j_2,j_3) - k_1(s-j_1-j_2)p_t(j_1,j_2,j_3) \\ &\quad + k_2(r-j_3+1)(j_1+1)p_t(j_1+1,j_2-1,j_3-1) - k_2(r-j_3)j_1p_t(j_1,j_2,j_3) \\ &\quad + k_3(s-j_1-j_2)(j_2+1)p_t(j_1-1,j_2+1,j_3) - k_3(s-j_1-j_2)j_2p_t(j_1,j_2,j_3)。 \end{aligned} \tag{154}$$

现在定义$\{p_t(j_1, j_2, j_3)\}$的母函数：

$$G_t(z_1,z_2,z_3) = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} p_t(j_1,j_2,j_3)z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3}, \tag{155}$$

并建立这个母函数所满足的微分方程，然后解此方程可得：

$$\begin{aligned} \log G_t(z_1,z_2,z_3) &= \frac{ak_1s[k_3sz_1 + (ak_3s + k_2r + k_3s)z_2]}{k_3s(a-1)(2ak_3s + k_2r - k_3s)}(e^{k_3s(a-1)t} - 1) \\ &\quad + \frac{k_1s(z_1 - az_2)(k_3sa + k_2r - k_3s)}{(2ak_3s + k_2r - k_3s)(ak_3s + k_2r)} \\ &\quad \times (1 - e^{-(k_2r+ak_3s)t}) - k_1st。 \end{aligned} \tag{156}$$

其中，a 是方程 $y^2 + (k_2r - k_3s/k_3s)y - (k_2r/k_3s)z_3 = 0$ 的正根。

显然，要从母函数 $G_t(z_1,z_2,z_3)$ 的表达式(156)得出 $p_t(j_1,j_2,j_3)$ 的显表达式是很困难的。但是可以借助母函数求得 t 时刻 A、B、P_r 分子数的期望值，即

$$M(1,t) = EX_t(1), \qquad M(2,t) = EX_t(2), \qquad M(3,t) = EX_t(3),$$

如
$$M(3,t)=\left.\frac{\partial\log G_t(z_1,z_2,z_3)}{\partial z_3}\right|_{z_1=z_2=z_3=1};$$
$$=d_1t+d_2t^2-d_3(1-e^{-(k_2r+k_3s)t}),\qquad(157)$$
其中
$$d_1=\frac{k_1s(k_2r)^2}{(k_2r+k_3s)^2},\qquad d_2=\frac{k_1k_2k_3rs^2}{2(k_2r+k_3s)},\qquad d_3=\frac{k_1s(k_2r)^2}{(k_2r+k_3s)^3}。$$
类似地还可以求得 $M(1,t)$ 与 $M(2,t)$ 的表达式。

有关马氏过程在化学中应用的更为详细的论述可参阅文献[43]、[55]。

§6　马尔科夫链在地质学中的应用

目前在国内外应用马氏链对地层序列进行分析已有一套比较完整的方法。而且马氏过程分析方法正在更加广泛地被应用到地质科学的许多研究问题之中。

在地球表面岩石的成份、结构、颜色等性质沿垂直方向上的变化形成为层状构造。根据沉积层的观测特征可以分析推断沉积过程，这有助于查明地层的形成和分布规律，为科学研究与探寻有用的矿物和矿床评价提供可靠的依据。在地层剖面上岩相的变化常常只与前一层中岩相的变化有关，而与更前边的地层无关。即具有无后效性，因此使用马氏链这一数学工具是很适宜的。本节将借助文献［56］中的若干实例作一简要介绍。

例28　一地层剖面有五种岩性的沉积序列如图2所示，其中各个字母所表示的岩性是

A：砂岩；　B：石灰岩；　C：页岩；　D：煤；　E：泥岩。

这五种相互排斥的岩性将此地表层垂直地划分为如图2所示的44层。如果将每一种岩性看作是一个状态，那么在状态即岩性沿垂直方向的转移过程中，每一个状态只与它的前一个状态有关。由图2的剖面上各状态上下排成的序列知：状态之间的具体转移频数矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}0&4&3&1&0\\1&0&3&4&0\\1&0&0&5&2\\5&1&1&0&5\\1&3&1&2&0\end{array}\right]\end{array},\qquad\begin{array}{c}\text{行上的总和}\\8\\8\\8\\12\\7\end{array}$$

这个矩阵显示出图2中的沉积序列里各种岩性之间相互转移的规则或倾向。现在将矩阵中的每个元素用它所在行上元素之总和来除，即得相应的转移概率矩阵

$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \left[\begin{array}{lllll}0&0.50&0.37&0.13&0\\0.13&0&0.37&0.50&0\\0.13&0&0&0.62&0.25\\0.42&0.08&0.08&0&0.42\\0.14&0.42&0.14&0.30&0\end{array}\right]\end{array}。\qquad(158)$$

在研究与分析该地层时，转移矩阵(158)说明这五种岩性之间的可能转移及定量规律。例28是按岩性自然分层的，因此转移矩阵的主对角线上所有元素都为零，如果按某单位长度等间距分层，那么情况就不同了。如图3所示的是由四种岩性：A、B、C、D 按等间距分层而

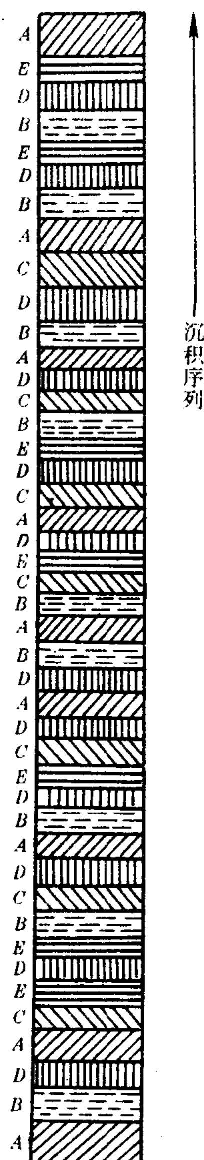


图2 五状态沉积序列柱状图

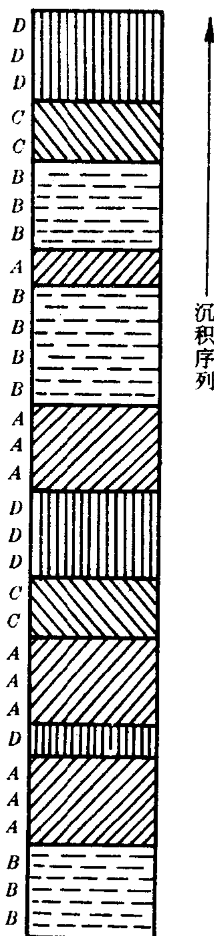


图3 等间距分层四状态沉积序列图

组成的垂直方向剖面图。相应的转移频数矩阵与转移概率矩阵分别依次为

$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.60 & 0.20 & 0.10 & 0.10 \\ 0.20 & 0.70 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0.50 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.67 \end{bmatrix} \end{array}。
$$

容易看出，当岩层的平均厚度比采样定间距大得很多时，对角线上的元素即从一状态转移到自身状态的概率就会变得较大，致使从该状态转移到其它别的状态的概率相对地变小。所以转移概率矩阵中主对角线上的元素较大时，反映出岩层的厚度也较大。

例29 吉林省某地下石炭统鹿圈屯组的两个地层剖面 I 与 II 的岩性转移频数矩阵 $N(\mathrm{I})$ 与 $N(\mathrm{II})$ 分别依次为

剖面Ⅰ的 $N(\text{Ⅰ})$

	A	B	C	D	G	F
A	0	0	0	1	0	0
B	0	0	1	3	1	0
C	1	1	0	2	0	0
D	0	3	3	0	0	3
G	0	0	0	1	0	0
F	0	0	0	3	0	0

剖面Ⅱ的 $N(\text{Ⅱ})$

	A	B	G	D	E	H
A	0	0	0	0	1	0
B	0	0	1	1	0	0
G	0	0	0	0	1	0
D	1	0	0	0	3	1
E	0	1	0	4	0	0
H	0	0	0	1	0	0

其中各字母代表的岩性如下：

A：含砾细碧玢岩；　　E：细碧玢岩；

B：石英角斑岩；　　F：细碧玢岩凝灰熔岩；

C：细碧玢岩凝灰岩；　　G：凝灰质砂岩；

D：角斑质凝灰岩；　　H：大理岩。

应当指出：若在原地层柱状图最底层（或最顶层）的岩层在整个地层剖面中只出现一次，那么在相应的马氏链中对应的状态只能转出（或转入）而不能转入（或转出），在相应的转移频数矩阵中对应于该状态的列（或行）上的元素全为零，这种状态及它所对应的岩层可以剔除不予考虑。$N(\text{Ⅰ})$ 与 $N(\text{Ⅱ})$ 正是经过这样的剔除处理之后而得到的转移频数矩阵，由 $N(\text{Ⅰ})$、$N(\text{Ⅱ})$ 可得相应的转移概率矩阵 $P(\text{Ⅰ})$、$P(\text{Ⅱ})$：

剖面Ⅰ的 $P(\text{Ⅰ})$

	A	B	C	D	G	F
A	0	0	0	1	0	0
B	0	0	0.2	0.6	0.2	0
C	0.25	0.25	0	0.5	0	0
D	0	0.33	0.33	0	0	0.34
G	0	0	0	1	0	0
F	0	0	0	1	0	0

剖面Ⅱ的 $P(\text{Ⅱ})$

	A	B	G	D	E	H
A	0	0	0	0	1	0
B	0	0	0.5	0.5	0	0
G	0	0	0	0	1	0
D	0.2	0	0	0	0.6	0.2
E	0	0.2	0	0.8	0	0
H	0	0	0	1	0	0

由剖面Ⅰ的 $N(\text{Ⅰ})$ 及 $P(\text{Ⅰ})$ 知：从各种岩性状态转移到角斑质凝灰岩 D 状态的总频数为10是最大的，概率也是最大的，转移的趋势最明显。计算 $P(\text{Ⅰ})$ 的不低于18次的幂矩阵可得：对正整数 $n\geqslant 18$，

$$P(\text{Ⅰ})^n=[1,1,1,1,1,1]'[0.04,0.18,0.18,0.42,0.04,0.14],$$

即 $[0.04,0.18,0.18,0.42,0.04,0.14]$ 是相应马氏链的平稳分布，它反映了 A、B、C、D、G、F 各种岩性在整个剖面Ⅰ的总量中依次所占比例数的估计，如角斑质凝灰岩约占全剖面Ⅰ的42%，远远超过其它各岩性所占的比例数。它居于主导地位。

类似地，由剖面Ⅱ的 $N(\text{Ⅱ})$ 及 $P(\text{Ⅱ})$ 知：从各种岩性状态转移到角斑质凝灰岩 D 状态的总频数是最大的，从总体上相比转移概率也是属于最大之例，转移趋势也是较明显的。计算 $P(\text{Ⅱ})$ 的不低于13次的幂矩阵可得：对正整数 $n\geqslant 13$，

$$P(\text{Ⅱ})^n=[1,1,1,1,1,1]'[0.08,0.07,0.03,0.39,0.35,0.08]。$$

即 $[0.08,0.07,0.03,0.39,0.35,0.08]$ 是相应马氏链的平稳分布，它反映出角斑质凝灰岩约占全剖面Ⅱ的39%，居主导地位。其次是细碧玢岩约占全剖面Ⅱ的35%，因此角斑质凝灰

岩在剖面Ⅰ与Ⅱ中皆占主导地位，从量上看这两个剖面有一定的相似性。

例30 设某地层剖面的一部分如图4所示，整个地层剖面由记为A、B、C、D的四种岩性所构成。注意考察图4的地层剖面，发现其中$A\to B\to C$和$A\to D\to C$的转移格式多次重复出现，于是引起了我们的思考或问题，其中的两个状态B与D有何地质上的联系？在沉积过程中B与D是否可以相互代替？可代替的地质依据是什么？相应的转移概率矩阵中对应于状态B与D的两行或两列之间是否具有某种相似性？为此，需要先给出有关相似性的概念。假设地层序列中向上的状态转移是顺着从底层到顶层来考虑的。现在引出一般转移概率矩阵中各行之间的相似性度量。设$P=[p_{ij}]$是具有N个状态$\{1, 2, \cdots, N\}$的(向上的)转移概率矩阵，定义

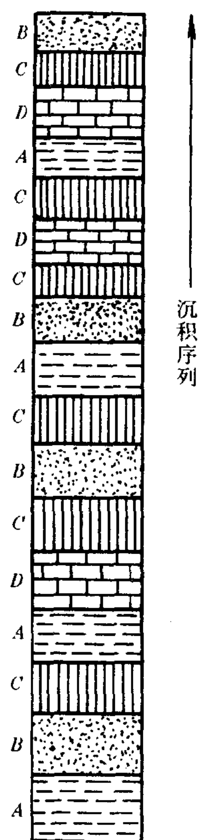


图4 四状态沉积序列柱状图片断

$$L_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{N}p_{ik}\,p_{jk}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}p_{ik}^2\sum_{k=1}^{N}p_{jk}^2}},\qquad i,j=1,2,\cdots,N。\tag{158}$$

从几何上看，当$N=2$时，L_{ij}就是两个长度为1的行向量$\left(p_{i1}\Big/\sqrt{\sum_{K=1}^{2}p_{ik}^2},\ p_{i2}\Big/\sqrt{\sum_{K=1}^{2}p_{ik}^2}\right)$与$\left(p_{j1}\Big/\sqrt{\sum_{k=1}^{2}p_{jk}^2},\ p_{j2}\Big/\sqrt{\sum_{k=1}^{2}p_{jk}^2}\right)$的夹角余弦，一者在另一者上的投影，$L_{ij}$反映了状态$i$与状态$j$之间在具有同一后继状态的倾向上的相似程度，若记$L$为$N\times N$矩阵

$$L=\begin{bmatrix}L_{11}&L_{12}&\cdots&L_{1N}\\L_{21}&L_{22}&\cdots&L_{2N}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\L_{N1}&L_{N2}&\cdots&L_{NN}\end{bmatrix},\tag{159}$$

显然

$$L_{ii}=1,\quad 0\leqslant L_{ij}\leqslant 1,\quad L_{ij}=L_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,N。\tag{160}$$

L_{ij}的数值越高表明在地层序列中状态i与j将以较大的概率有公共的后继(或说居于上边的)状态。

对称地，在地层序列中还可以考虑顺着从顶层到底层的向下的状态转移。若记$Q=[q_{ij}]$是具有N个状态$\{1, 2, \cdots, N\}$的(向下的)转移概率矩阵，为衡量Q中各列之间的相似程度，定义

$$R_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{N}q_{ki}\,q_{kj}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}q_{ki}^2\sum_{k=1}^{N}q_{kj}^2}},\qquad i,j=1,2,\cdots,N。\tag{161}$$

显然

$$R_{ii}=1,\quad 0\leqslant R_{ij}\leqslant 1,\quad R_{ij}=R_{ji},\qquad i,j=1,2,\cdots,N。\tag{162}$$

$N\times N$矩阵$R=[R_{ij}]$的意义与L是完全类同对称的。

此外，再定义

$$C_{ij} = L_{ij}R_{ij},\quad i,j = 1,2,\cdots,N,\quad \mathbf{C} = [C_{ij}]。\tag{163}$$

显然

$$C_{ii} = 1,\quad 0 \leqslant C_{ij} \leqslant 1,\quad C_{ij} = C_{ji},\quad i,j = 1,2,\cdots,N。\tag{164}$$

C_{ij}的数值描述了状态 i 与状态 j 的相似程度，显示出 i 与 j 的一种公共的前后关系。

如果关于图4的完整地层序列的转移频数矩阵及相应的(向上)转移概率矩阵 P 分别依次为

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 11 & 2 & 10 \\ 4 & 0 & 13 & 3 \\ 14 & 6 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 15 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 行上和 \\ 23 \\ 20 \\ 29 \\ 22 \end{array},\qquad P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.48 & 0.09 & 0.43 \\ 0.2 & 0 & 0.65 & 0.15 \\ 0.48 & 0.21 & 0 & 0.31 \\ 0.18 & 0.14 & 0.68 & 0 \end{bmatrix} \end{array}。\tag{165}$$

利用式(158)算得

$$L = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.27 & 0.6 & 0.25 \\ 0.27 & 1 & 0.34 & 0.96 \\ 0.6 & 0.34 & 1 & 0.27 \\ 0.25 & 0.96 & 0.27 & 1 \end{bmatrix} \end{array},\tag{166}$$

在 L 中 $L_{DB}=0.96$，数值很高，这表明一种强的倾向即 D 与 B 两个状态常有同样的后继状态。又 $L_{DA}=0.25$，数值较低，这表明状态 D 与 A 常有不同的后继状态。

仍由式(165)中的转移频数矩阵可算出相应的(向下)转移概率矩阵 Q

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ 列上和 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 11 & 2 & 10 \\ 4 & 0 & 13 & 3 \\ 14 & 6 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 15 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 22 & 20 & 30 & 22 \end{array} \end{array},\qquad Q = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.55 & 0.07 & 0.45 \\ 0.18 & 0 & 0.43 & 0.14 \\ 0.64 & 0.3 & 0 & 0.41 \\ 0.18 & 0.15 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}。\tag{167}$$

再由式(161)及式(163)得

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.49 & 0.37 & 0.63 \\ 0.49 & 1 & 0.27 & 0.94 \\ 0.37 & 0.27 & 1 & 0.21 \\ 0.63 & 0.94 & 0.21 & 1 \end{bmatrix} \end{array},\qquad \mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.13 & 0.22 & 0.16 \\ 0.13 & 1 & 0.09 & 0.9 \\ 0.22 & 0.09 & 1 & 0.06 \\ 0,16 & 0.9 & 0.06 & 1 \end{bmatrix} \end{array}。\tag{168}$$

利用式(166)、式(168)L、R、C 中各元素数值所表示的状态之间相似性程度的大小顺序，联结各有关的状态可作出如下的谱系图：

从图5中的三个谱系图明显地看出：状态 B 与 D 是密切相关的，它们往往有共同的居前和继后状态 A 与 C。在地层序列分析中，如果能作出一个系统状态的完整的或比较完整的谱系图，它常常成为野外或室内研究新问题的出发点。

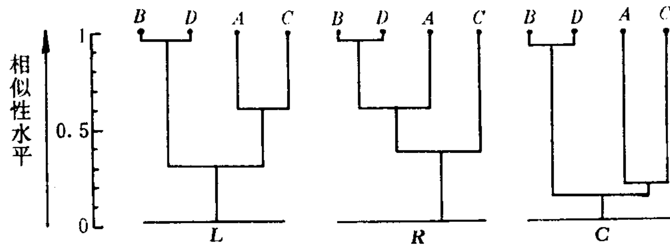


图 5 谱系图

例31 某沉积盆地的沉积剖面由下列六种岩性构成：CH(燧石)，LS(石灰岩)，SH(页岩)，SS(砂岩)，GS(绿石)，PM(卵石泥岩)。根据采样数据可得转移频数矩阵

	CH	LS	SH	SS	GS	PM	行上总和
CH	0	13	189	26	89	3	320
LS	12	0	6	1	20	0	39
SH	193	7	0	77	151	6	434
SS	19	1	91	0	8	2	121
GS	86	21	154	15	0	2	278
PM	2	0	5	2	2	0	11
列上总和	312	42	445	121	270	13	

相应的岩性向上转移概率矩阵 P 为

$$P=\begin{array}{c|cccccc} & CH & LS & SH & SS & GS & PM \\ \hline CH & 0 & 0.04 & 0.59 & 0.08 & 0.28 & 0.01 \\ LS & 0.31 & 0 & 0.15 & 0.03 & 0.51 & 0 \\ SH & 0.44 & 0.02 & 0 & 0.18 & 0.35 & 0.01 \\ SS & 0.16 & 0.01 & 0.75 & 0 & 0.07 & 0.02 \\ GS & 0.31 & 0.08 & 0.55 & 0.05 & 0 & 0.01 \\ PM & 0.18 & 0 & 0.45 & 0.18 & 0.18 & 0 \end{array}, \tag{169}$$

相应的岩性向下转移概率矩阵 Q 为

$$Q=\begin{array}{c|cccccc} & CH & LS & SH & SS & GS & PM \\ \hline CH & 0 & 0.31 & 0.42 & 0.21 & 0.33 & 0.23 \\ LS & 0.04 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.07 & 0 \\ SH & 0.62 & 0.17 & 0 & 0.64 & 0.56 & 0.46 \\ SS & 0.07 & 0.02 & 0.20 & 0 & 0.03 & 0.15 \\ GS & 0.28 & 0.5 & 0.35 & 0.12 & 0 & 0.15 \\ PM & 0.01 & 0 & 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0 \end{array}。 \tag{170}$$

对 P 定义如下的熵组，即向上转移的熵组：

$$H_i^{(\text{post})} = -\sum_{j=1}^{6} p_{ij}\log p_{ij},\quad i=1,2,\cdots,6。 \tag{171}$$

若 $H_i^{(\text{post})}=0$，在规定“$0\cdot\infty=0$”之下，那么必定是 p_{ij}，$j=1, 2, \cdots, 6$ 中之一为1，其

余皆为零，这表示状态 i 行使着一种确定性影响控制了它的后继状态的选择，即状态 i 总转移到一个确定的状态。若 $H_i^{(post)}$ 较小，这可解释为状态 i 具有较强的记忆力，而且这种记忆力是随着 $H_i^{(post)}$ 的减小而逐渐增强的。若 $H_i^{(post)}$ 较大，这表明状态 i 的记忆力较弱，模糊不清。因而有较多的状态可以作为 i 的后继状态。

类似地，对 Q 可以对称地定义向下转移的熵组。

$$H_i^{(pre)} = -\sum_{j=1}^{6} q_{ji}\log q_{ji}, \qquad i=1,2,\cdots,6。 \tag{172}$$

对 $H_i^{(pre)}$ 等于零、较小、较大等各种情况，可以类似于 $H_i^{(post)}$ 作出对称的解释。如果综合地同时考查 $H_i^{(post)}$ 与 $H_i^{(pre)}$，那么它们作为描述状态 i 出现以后和出现以前相衔接的岩性转移多样性的指标是很适宜的。若 $H_i^{(pre)}>H_i^{(post)}$，则表明状态 i 的继后岩性比 i 的居前岩性出现有更多的确定性；反之，若 $H_i^{(pre)}<H_i^{(post)}$，则表明状态 i 对它的居前岩性的依赖性比 i 影响于继后岩性更强。

利用式(169)、(170)所得的具体数据，依公式(171)、(172)计算可得下面的熵组表与熵相关图。

表10 熵组表

$H^{(pre)}$	状态	$H^{(post)}$
1.414	CH	1.507
1.583	LS	1.568
1.679	SH	1.674
1.420	SS	1.143
1.478	GS	1.556
1.834	PM	1.859

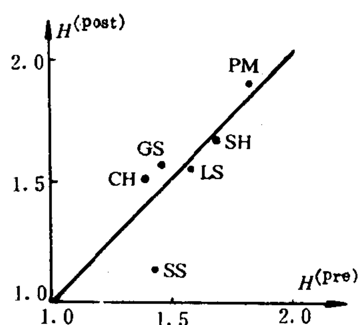


图 6 熵相关图

从表10与图6可以看出：对卵石泥岩 PM 而言，相比之下 $H_6^{(pre)}$ 与 $H_6^{(post)}$ 都是最大的，因而卵石泥岩流入盆地是最随机的或最不确定的事件；对于砂岩 SS 而言，相比之下 $H_4^{(pre)}$ 与 $H_4^{(post)}$ 都是最小的，而且 $H_4^{(post)}< H_4^{(pre)}$，因而对它的后继状态的选择影响是较强的。

事实表明熵组与岩性的旋回沉积也有着较强的联系。总之熵的概念对岩性分析是很有用的。

在地层沉积的分析中，除了上面已考察的岩性沿垂直方向的变化转移规律即层理之外，还应考察因沉积机制作用所确定的沉积物的总量，即每种岩层的厚度，进而需要建立同时综合考察层理与厚度两者的数学模型，这便引入了半马尔科夫链沉积模型，下面将给出半马尔科夫链的数学定义。

设 $Z=\{z_n,n=0,1,\cdots\}$ 是取值于 $S=\{0,1,\cdots,N\}$ 中的随机变量序列，又 $T=\{T_n,n=0,1,\cdots\}$ 是取值于 $[0,\infty)$ 中的随机变量序列，而且 $0=T_0\leqslant T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots$，称随机序列 $(Z,T)=\{(z_n,T_n),n=0,1,\cdots\}$ 为状态空间 S 上的**马尔科夫更新序列**，如果对任何 $n=0,1,\cdots,j\in S,t\geqslant 0$ 都有

$$\begin{aligned} P(z_{n+1}) &= j, T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_0,Z_1,\cdots,Z_n,T_0,T_1,\cdots,T_n) \\ &= P(Z_{n+1}=j,\quad T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_n)。 \end{aligned} \tag{173}$$

又如果对任何 i，$j\in S$，$t\geqslant 0$，

$$Q_{ij}(t)=P(Z_{n+1}=j,T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_n=i) \tag{174}$$

都与 n 无关，则称此(Z,T)是齐次的。称此$\{Q_{ij}(t),i,j\in S\}$为**半马尔科夫核**。显然，由式(174)，这时有

$$\lim_{t\to\infty}Q_{ij}(t)=P(Z_{n+1}=j|Z_n=i)=p_{ij},\quad i,j\in S, \tag{175}$$

并有以下重要的结论[51]。

定理11 若(Z,T)是齐次马尔科夫更新序列，则$\{Z_n,n=0,1,\cdots\}$是状态空间 S 上具有转移概率矩阵$[p_{ij}]$的齐次马氏链。

定理12 若(Z,T)是齐次马尔科夫更新序列，对任何 i，$j\in S$，$t\geqslant 0$，记

$$G_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}}=P(T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_n=i,Z_{n+1}=j), & p_{ij}>0,\\ 1, & p_{ij}=0。\end{cases} \tag{176}$$

则对任意的正整数 n 及任意的 t_1，t_2，$\cdots$，$t_n\geqslant 0$有

$$P(T_1-T_0\leqslant t_1,\cdots,T_n-T_{n-1}\leqslant t_n|z_0,z_1,\cdots,z_n)=G_{z_0z_1}(t_1)G_{z_1z_2}(t_2)\cdots G_{z_{n-1}z_n}(t_n)。 \tag{177}$$

即在给定马氏链$\{z_n,n=0,1,\cdots\}$的条件下，增量 T_1-T_0，T_2-T_1，$\cdots$条件独立，而且 $T_{n+1}-T_n$ 的分布只依赖于 Z_n 和 Z_{n+1}。

对任何 $t\geqslant 0$，若令

$$X_t=Z_n,\qquad 当\ T_n\leqslant t<T_{n+1}\ 时, \tag{178}$$

则称此$\{X_t,t\geqslant 0\}$是与马尔科夫更新序列(Z,T)相联系的**半马尔科夫链**。X_t 可以看成是该链在时刻 t 所处的状态，且在时刻 T_1，T_2，$\cdots$发生状态转移，在 T_n 时刻转入状态 Z_n，在状态 Z_n 上的逗留时间长为 $T_{n+1}-T_n$，在马氏链中，在每个状态上的逗留时间服从指数分布。在半马氏链的情形下，逗留时间的分布是一般分布。当所有的 $G_{ij}(t)$都是指数分布时，那么半马氏链就成为马氏链。马氏链在任一时刻 t 处都具有马氏性，而半马氏链只有在状态转移时刻(常常是随机的)才具有马氏性。

若用$\{z_0,z_1,\cdots\}$表示岩性沿垂直方向的变化转移，用 $T_{n+1}-T_n$ 表示岩性为 Z_n 的岩层厚度。那么半马氏链$\{X_t,t\geqslant 0\}$便是描述一般沉积过程的恰当模型。关于半马氏链的理论与在地质学中应用的详细介绍参看专著［51］、［56］。尤其是在［56］中给出了许多国内外的研究实例，它们在理论与方法的应用上都具有较高的参考价值。

此外，值得指出的是马尔科夫过程在地震烈度的计算、中短期地震预报方法及评价各种预报方法的有效性上也都得到了有效的应用，并在实际的地震预报中，如1976年8月19日四川松潘大地震之前，取得了较准确的预报效果。有关这方面的工作已收集在［57］、［58］、［59］、［60］这组文献之中。当我们已知上次发生大地震以来距今已有时间为 T_0年的间歇，现在要预测今后 T 年内会发生大地震的可能性即概率是多少?为了回答这个问题，如果采用齐次马尔科夫模型，即认为今后 T 年内发生大地震的概率仅与 T 值有关，而与上次大地震至今的时间 T_0年无关，这样假设是粗糙的与实际情况不太相符的。事实上，因为大地震的孕育是一种应变能的积累过程，一般随着 T_0值的增大，应变能的积累也会逐渐增大，所以在(T_0，T_0+T) 年内发生大地震的概率不是一个与 T_0无关的常数，一般应该是随 T_0值的增大而增大的，从而采用非齐次马氏链作为模型是较切合实际的。当然非齐次模型比齐次模型更加复杂。对于非齐次马氏链模型的具体预测方法，该方法的假设前提与理论依据等可参看文

献 [60]。本书不再介绍。

虽然本章从多篇文献中收集整理的这些例子涉及到多种应用领域，然而这仍然是一鳞半爪极不全面的，其实马氏过程在天文学、天体物理学、气象学、自动控制、随机振动、通信理论、随机数字信号处理中，甚至在社会科学如心理学、教育学中都能找到它的应用。这说明了马氏过程的应用确实是相当广泛的。

随着科学技术的发展，实际应用不断提出需要，马氏过程也在相应地演变与深化，或者进行各种推广，或者派生出其它马氏过程的变形，以便能够更加逼真地刻画所研究的客观现象。譬如从单指标马氏过程扩展到多指标马氏过程的研究，不仅是数学理论本身的自然发展与深化，更主要的是为了满足实际应用的需求，众所周知，两指标马氏过程在定量描术图像信息、建立它的数学模型、研究图像随着空间位置或时间的变化特性时，都是有力的数学工具（参见文献 [61]、[62]）。又如马尔科夫更新序列与半马尔科夫链，它们作为马尔科夫链的变形在可靠性问题中有着重要的应用。再如在语言或汉字识别中获得了有效应用的隐马尔科夫模型（参看文献[63]、[64]、[65]）也可以看成是一种马氏链模型的变形。总之，现实世界提出的越来越多越来越高的要求必将推进马氏过程理论的不断发展与扩充，从而马氏过程的应用范围将随之越来越广，其作用也将越来越大越来越深入。

参 考 文 献

[1] 王梓坤：《随机过程论》，科学出版社，1965。

[2] 王梓坤：《生灭过程与马尔科夫链》，科学出版社，1980。

[3] 李漳南，吴荣：《随机过程教程》，高等教育出版社，1987。

[4] 何声武：《随机过程导论》，华东师范大学出版社，1989。

[5] 胡迪鹤：《可数状态的马尔可夫过程论》，武汉大学出版社，1983。

[6] 胡迪鹤：《应用随机过程引论》，哈尔滨工业大学出版社，1984。

[7] 复旦大学编：《概率论(第三册)-随机过程》，人民教育出版社，1981。

[8] 钟开莱：《初等概率论附随机过程》(魏宗舒等译)，人民教育出版社，1979。

[9] Chung, K. L.: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, 1960。

[10] 费勒，W.：《概率论及其应用(下册)》(刘文译)，科学出版社，1979。

[11] 帕尔逊，E.：《随机过程》(邓永录，杨振明译)，高等教育出版社，1987。

[12] Karlin, S. and Taylor, H. M.: A Second Course in Stochastic Processes, Academic Press, 1981。

[13] Isaacson, D. L. and Madsen, R. W.: Markov Chains Theory and Applications, Wiley, 1976。

[14] Kemeny, J. G. and Snell, J. L.: Finite Markov Chains, Springer-Verlag, 1983。

[15] Iosifescu, M.: Finite Markov Processes and Their Applications, Wiley, 1980。

[16] Horn, R. A. and Johnson, C. R.: Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1985。

[17] 蒋庆琅：《随机过程原理与生命科学模型》(方积乾译)，上海翻译出版公司，1987。

[18] 周俊健，刘嘉焜：方阵的正整数次幂及其在有限马尔科夫链中的应用，《数理统计与应用概率》，第六卷第一期(1991)。

[19] 康继鼎，刘峙山：关于有穷齐次 Марков 链遍历性的几点注记，《数学的实践与认识》，1(1980)。

[20] 陈小康，杨明辉：关于遍历随机矩阵族的遍历指数的上确界，《数学的实践与认识》，4(1980)。

[21] 周代琪，施仁杰，文成义：数字锁相环中的时序环路滤波器，《西北电讯工程学院学报》，1(1977)。

[22] 施仁杰：Markov 随机系统的稳态分布及其计算。西安电子科技大学研究报告，XDU310—89—09(1989)。

[23] 施仁杰：Markov 随机系统的单一输入超状态分解，西安电子科技大学研究报告，XDU310—90—09(1990)。

[24] Feinberg, B. N. and Chiu, S. S.: A Method to Calculate Steady-State Distributions of Large Markov Chains by Aggregating States, Operations Research, Vol. 35 No. 2 1987。

[25] 肖果能：有限马氏链的状态常返性，《长沙铁道学院学报》，第 9 卷第 2 期(1991)。

[26] Doob, J. L.: Stochastic Processes, Wiley, 1953。

[27] Basawa, I. V. and Prakasa Rao, B. L. S.: Statistical Inference for Stochastic Processes, Academic Press, 1980。

[28] 劳，C. R.：《线性统计推断及其应用》(张燮等译)，科学出版社，1987。

[29] 克拉美，H.：《统计学数学方法》(魏宗舒等译)，上海科学技术出版社，1966。

[30] Billingsley, P.: The Lindeberg-Levy Theorem for Martingales, Proc. Amer. Math. Soc., 12, 1961。

[31] Billingsley, P.: Statistical Inference for Markov Processes, University of Chicago Press, 1961。

[32] Billingsley, P.: Statistical Methods for Markov Chains, Ann. Math. Statist., 32, 1961。

[33] 傅承德：Markov链上的自助法，《中国统计学报》，28(2)，1990。

[34] Fox, B. L. and Landi, D. M.: An Algorithm for Identifying the Ergodic Subchains and Transient States of a Stochastic Matrix, Communication of the Association for Computing Machinery, 11, 1968。

[35] Sumita, U. and Rieders, M.: A New Algorithm for Computing the Ergodic Probability Vec tor for Large Markov Chains, Probability in the Engineering and Informational Sciences, 4, 1990。

[36] Hoel, P. G., Port, S. C., Stone, C. J.: Introduction to Stochastic Processes, Houghton Mifflin Company, 1972。

[37] Kannan, D.: An Introduction to Stochastic Processes, Elsevier North Holland Inc., 1979。

[38] Ross, S. M., Stochastic Processes, John Wiley & Sons, Inc., 1983。

[39] 陆大绘：《随机过程及其应用》，清华大学出版社，1986。

[40] 盛承懋，钱君燕：《经济管理中的定量决策方法》，上海科学技术文献出版社，1990。

[41] 罗积玉，邢瑛：《经济统计分析方法及预测》，清华大学出版社，1987。

[42] Howard, R. A.: Dynamic Programming and Markov Processes, John Wiley & Sons, Inc., 1960。

[43] 巴鲁查-赖特，A. T.：《马尔柯夫过程论初步及其应用》(杨纪珂，吴立德译)，上海科学技术出版社，1979。

[44] 丁勇：马尔可夫链在生长发育研究中的应用，《数学的实践与认识》，2(1990)。

[45] 胡良和：马尔可夫链在研究血型分布规律上的应用，《数学的实践与认识》，4(1987)。

[46] 杨子恒：离散分支过程及其在群体遗传学中的应用，《数学的实践与认识》，1(1989)。

[47] 徐光辉：《随机服务系统》，科学出版社，1980。

[48] 吴立德，吴霭成：《计算机系统性能评价》，上海科学技术出版社，1986。

[49] 陈兴业：《计算机系统性能评价》，华南工学院出版社，1987。

[50] 孟玉珂：《排队论基础及应用》，同济大学出版社，1989。

[51] 曹晋华，程侃：《可靠性数学引论》，科学出版社，1986。

[52] 舒曼，M. L.：《软件工程——设计、可靠性和管理》(朱兆堂等译)，上海翻译出版公司，1989。

[53] Hayes, J. F.: Modeling and Analysis of Computer Communications Networks, Plenum Press, 1984。

[54] Ajmone Marsan, M., Balbo, G., and Conte, G.: Performance Models of Multiprocessor Systems, The MIT Press, 1986。

[55] Van Kampen, N. G.: Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North－Holland Publishing Company, 1981。

[56] 景毅，王世称，苑清扬：《马尔柯夫过程在地质学中的应用》，地质出版社，1986。

[57] 天津地震队，南开大学数学系统计预报组：预测下次地震发震时间的一种方法，《数学学报》，第18卷第2期，1975。

[58] 国家地震局分析预报中心：《中国地震烈度区划工作报告》，地震出版社，1983。

[59] 朱成熹：预测最大震级的一种方法，《地震科学研究》，第一辑，1980。

[60] 朱成熹：马尔柯夫链随机泛函的一种预报方法——缺震法，《地震学报》，Vol. 6增刊，1984。

[61] 黄煦涛：《二维数字信号处理Ⅰ》(徐元培译)，科学出版社，1985。

[62] 威尔斯基，A. S.：《数字信号处理与控制和估值理论——生长点、交叉区与相似方向》(常迥，陈伟人译)，科学出版社，1985。

[63] Rabiner, L. R. and Juang, B. H.: An Introduction to Hidden Markov Models, IEEE ASSP Mag. Jan. 1986。

[64] 陈锡先等：隐马氏链模型汉语四声声调的识别，《北京邮电学院学报》，No. 2，1988。

[65] 胡玉濮：二指标隐马尔可夫过程及其在汉字识别中的应用，《电子学报》，20卷第1期，1992。

内容索引

一画—四画

一阶自相关 (124)
一阶(循环)序列相关 (125)
一致弱遍历性 (110)
一致强遍历性 (116)
卜里耶坛子模型 (104)
马尔科夫性(马氏性) (2)
马尔科夫链(马氏链) (2, 167)
马氏链的过份函数 (64)
马尔科夫矩阵 (102)
马尔科夫排队网络 (228)
马尔科夫更新序列 (245)
分支过程 (14, 202)
分组马氏链 (136)
互通 (17)
不可分 (33)
不规则的随机矩阵 (102)
水库贮水模型 (15)
比例系数矩阵 (198)
队长 (211)
开排队网络 (228)
双分子化学反应 (236)
切普曼—柯尔莫哥洛夫方程 (C-K 方程) (6, 168)

五画—六画

本质状态 (17)
本质类 (33)
正常返 (26)
正向序列相依的转移矩阵 (133)
可分的 (33)
可靠度 (231)
可用度 (231)
平均回转时间 (2, 18)
平稳分布 (49)
平稳的增量 (186)
半马尔科夫链 (246)
半马尔科夫核 (246)
母函数 (89)
生灭过程 (181)
过程的样本 (1)
齐次马氏链 (7)
关联矩阵 (111)
自 i 可达到 j (17)
闭集 (33)
闭包 (33)
闭排队网络 (228)
吸收状态 (33, 175)
同质性检验 (131)
负向序列相依的转移矩阵 (133)
列和法 (148)
忙期 (211)
传染病流行模型 (206)

七画—八画

状态空间 (1)
状态类 (32)
初始分布 (7)
条件熵 (141)

利润矩阵 (196)
利特尔公式 (222)
杜伯林公式 (20)
库尔贝克-莱布勒信息函数 (9)
闲期 (224)
连续参数的随机过程 (1)
纯生过程 (181)
纯灭过程 (181)
周期状态 (26)
周期类 (32)
非齐次马氏链 (7)
非本质状态 (17)
非本质类 (33)
非常返状态（不返回的，滑过的状态） (26)
非常返类 (32)
非周期状态 (26)
非周期类 (32)
空间齐次的马氏链 (16，168)
单一输入超状态 (92)
单一输入超状态可分解的马氏链 (92)
凯莱-哈密顿定理 (79)
直接消耗系数 (198)
固有的遍历系数 (101)
转移概率 (6，168)
转移概率矩阵 (6，168)

九画—十画

绝对概率 (7)
矩阵特征值的几何重数与代数重数 (77)
保守的 (177)
柯尔莫哥洛夫向前与向后微分方程组 (177)
标准性条件 (1
独立的增量 (186)
响应时间 (220，226)
费歇耳信息函数 (124)
样本空间 (1)
弱遍历性 (104)
爱伦菲斯特模型 (13)
消亡率 (181)
消极常返状态（零常返状态，零状态） (26)
离散参数的随机过程 (1)
离散骨架 (170)
逗留时间 (221)

十一画—十二画

停止时间（停时） (9)
第 n 次发生时间 (190)
第 n 个相继发生的间隔时间 (190)
隐马尔科夫模型 (247)
强马尔科夫性 (10)
强遍历性 (112)
常返状态（返回的，持久的状态） (26)
常返类 (32)
基本矩阵与基本矩阵法 (155)
基因 (208)
混合矩阵 (111)
排队模型 (14，219)
排队网络 (228)
渐近齐次马氏链 (113)
渐近平稳马氏链 (113)
密度矩阵 (175)
随机矩阵 (6)
随机徘徊 (54，61)
随机徘徊滤波器 (11)
随机服务系统 (210)
遍历的状态 (27)
遍历性 (40)
遍历矩阵 (75)
遍历指数 (75)
遍历系数 (101)
超状态 (92)
等价 (92)
等待时间 (210)
普阿松过程 (186)
最优决策 (200)
遗传基因模型 (208)

十二画以上

群体增长或消亡模型 (202)
概率空间 (1)
零常返类 (32)
聚集状态法 (92)

谱系图 (243)
熵 (140)
熵组表 (245)
熵相关图 (245)
增生率 (181)
霍华德马尔科夫序贯决策 (201)
瞬时状态 (175)
稳定的随机矩阵 (101)

外来字

K 重马尔科夫链 (8)
m 步转移概率 (6)
m 步转移概率矩阵 (6)
m 阶公共后继状态 (145)
Q - 矩阵 (180)
Q - 过程 (180)
σ - 代数 (1)
τ 前事件 (10)
τ 后事件 (10)
τ 前 σ - 代数 (100)

[General Information]
书名=马尔科夫链基础及其应用
作者=施仁杰
页数=252
SS号=10236522
DX号=
出版日期=1992年11月第1版
出版社=西安电子科技大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第一章 马尔科夫链的基本概念
1 马尔科夫链的定义
2 转移概率
3 多重马尔科夫链
4 停止时间与强马尔科夫性
5 马尔科夫链模型
第二章 状态的分类
1 状态的基本属性
1.可达关系
2.几个特征量
3.特征量之间的关系
4.状态的基本属性
2 状态属性的判别及其有关性质
1.常返性的判定及其有关性质
2.周期性的判定及其有关性质
3 状态空间的分解
1.状态类与闭集
2.状态空间的分解
3.马尔科夫随机系统的运动规律
第三章 转移概率的稳定性能
1 转移概率的极限性质
2 转移概率平均的根限性质
3 平稳分布
4 计算首达概率与平均首达时间的代数方法
1.线性方程组的非负解
2.首达概率与平均首达时间的方程解
3.常返性的代数判别法
第四章 有限马尔科夫链
1 有限马尔科夫链的特异性质
2 有限马尔科夫链的代数处理方法
1.几个预备引理
2.多步转移概率的计算公式与遍历性
3.常返性、周期性与状态空间分解的代数处理
3 计算大马尔科夫链的平稳分布的聚集状态法
第五章 有限非齐次马尔科夫链
1 基本概念
2 弱遍历性
3 强遍历性
第六章 马尔科夫链的统计推断
1 最大似然估计
1.转移概率的最大似然估计

2.序列相关的渐近分布
2 假设检验
1.X2检验
2.基于序列相关之上的独立性检验
3 更深入的论题
1.吸收链的推断
2.分组链
3.熵
4.可列状态空间
第七章 马尔科夫链在计算机上的分析
1 遍历性的判定--列和法
2 马尔科夫链的分析
1.非遍历马尔科夫链的分析
2.遍历马尔科夫链的分析
3 大马尔科夫链与可列马尔科夫链的分析
1.不可分大马尔科夫链的平稳分布
2.可列马尔科夫链的转移概率矩阵的分析
第八章 连续参数的马尔科夫链
1 基本的概念与性质
2 标准转移概率的可微性
3 柯尔莫哥洛夫向前与向后方程
4 两个重要的连续参数齐次马尔科夫链
1.生灭过程
2.普阿松过程
第九章 马尔科夫链的应用
1 马尔科夫链在经济领域中的应用
2 马尔科夫链在生命科学中的应用
3 马尔科夫链在随机服务系统中的应用
4 马尔科夫链在计算机科学中的应用
5 马尔科夫链在物理学与化学中的应用
1.马尔科夫链在物理学中的简单应用
2.马尔科夫链在化学中的简单应用
6 马尔科夫链在地质学中的应用
参考文献
内容索引